

I Quadrati Magici

I Quadrati Magici

- Un quadrato magico di ordine n è una tabella quadrata contenente i primi n^2 numeri interi, in modo tale che la somma dei numeri presenti in ogni riga, in ogni colonna e in entrambe le diagonali dia sempre lo stesso numero, che viene detto costante magica.

Il primo quadrato magico risale all'antica Cina, ai tempi della dinastia Shang (2000 a.C. circa) quando, secondo la leggenda, ci fu una grande inondazione. Per placare l'ira del fiume Lo, la popolazione locale offrì sacrifici al dio del fiume. Malgrado ciò, ogni volta appariva una tartaruga che scivolava fuori dal fiume e passava con noncuranza vicino al sacrificio. La popolazione considerava la tartaruga un segno del dio che continuava a rifiutare i sacrifici offerti. Un giorno un bambino notò che c'era un quadrato sul guscio della tartaruga. Al suo interno vi erano i primi nove numeri sistemati in tre righe e tre colonne. Il bambino osservò anche che i numeri distribuiti nelle righe, nelle colonne e nelle due diagonali, se sommati, davano tutti 15 come risultato. E fu così che la popolazione capì che quello era il numero di sacrifici da raggiungere per placare il dio del fiume.

Il quadrato descritto nella leggenda, noto come Lo Shu è un quadrato magico di ordine 3, la cui costante magica è 15:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

- Somma delle righe:
 - (1) $8 + 3 + 4 = 15$
 - (2) $1 + 5 + 9 = 15$
 - (3) $6 + 7 + 2 = 15$
- Somma delle colonne:
 - (1) $8 + 1 + 6 = 15$
 - (2) $3 + 5 + 7 = 15$
 - (3) $4 + 9 + 2 = 15$
- Somma delle diagonali:
 - (1) $8 + 5 + 2 = 15$
 - (2) $4 + 5 + 6 = 15$

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Il quadrato magico
rappresentato in
quest'opera è il
seguinte.

Come si può facilmente
verificare, la costante
magica di questo
quadrato è 34.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Metodi per costruire quadrali magici

- Per costruire un quadrato magico è necessario anzitutto trovare una formula generale per determinare la costante magica.
- Un quadrato magico si ottiene da una serie di n^2 numeri interi consecutivi. L'ultimo numero della serie è quindi n^2 , dove n è l'ordine del quadrato.
- Calcoliamo prima di tutto la somma dei primi n^2 numeri interi, ricordando che la somma dei primi n interi è data dalla formula

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

- Per costruire quadrati magici si procede in gran parte per tentativi ed errori, ma in alcuni casi è possibile derivare un algoritmo. Analizzeremo questi casi nelle pagine seguenti.

Costruzione di quadrati magici di ordine dispari

Un algoritmo per costruire un quadrato magico di ordine dispari viene attribuito al matematico Simon de la Loubère (1642-1729) che lo ideò nel 1693, benchè probabilmente lo studioso ne fosse venuto a conoscenza nel corso di uno dei suoi viaggi in Asia.

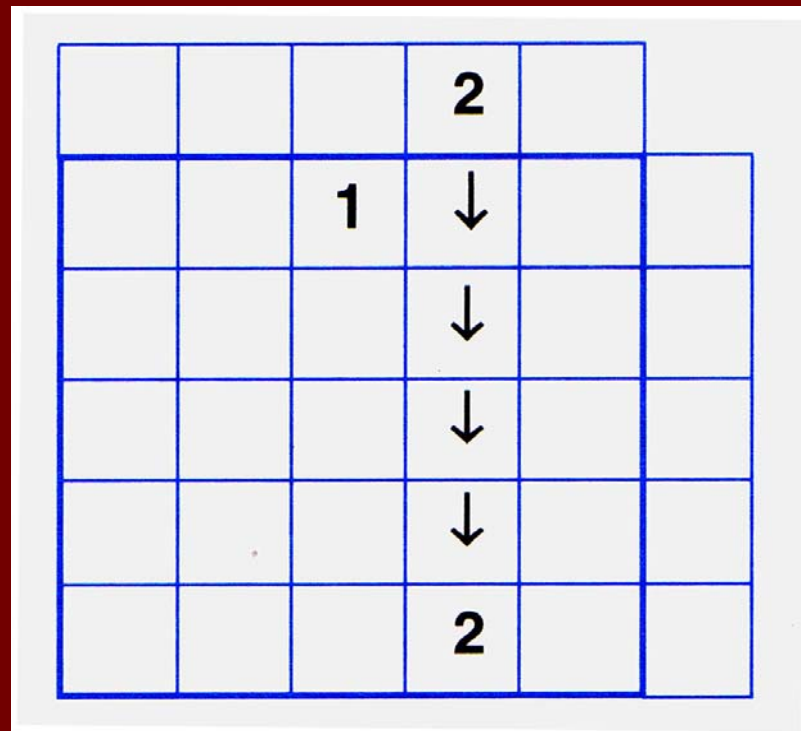
Serviamoci del suo algoritmo su un quadrato di ordine 5, cioè un quadrato che contiene i primi 25 numeri, con costante magica pari a 65.

$$65 = \frac{25 \times 26}{2 \times 5}$$

- 1. Posizioniamo l'1 nella cella centrale in alto:

		1		

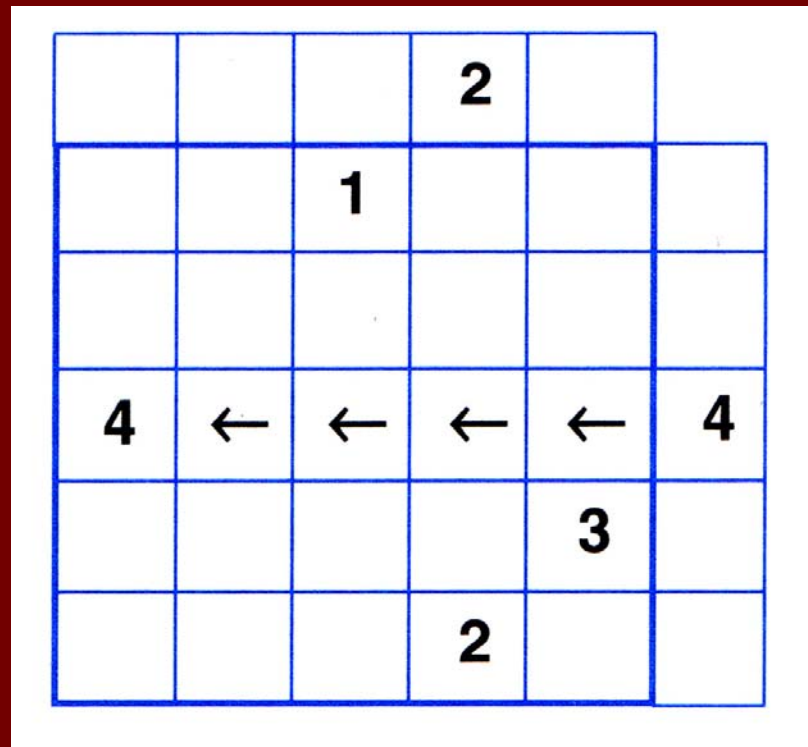
2. Procediamo in diagonale verso destra e verso l'alto, e posizioniamo la cifra successiva, il 2, in un quadrato immaginario al di fuori del quadrato vero. Visto che il 2 si trova al di fuori del quadrato, portiamolo alla fine della colonna alla quale allineato:



- 3. Mettiamo la cifra successiva, il 3, verso l'alto in diagonale, alla destra del 2:

			2		
		1	↓		
			↓		
			↓		
			↓	3	
			2		

- Iteriamo il procedimento per il numero successivo, il 4, inserendolo nella cella immaginaria che si trova in alto e alla destra del 3 e poi spostiamolo all'estremità opposta della riga:



5. Inseriamo il numero 5 in alto a destra rispetto al numero 4:

			2		
		1			
	5				
4					4
				3	
			2		

6. Lo stesso tipo di movimento non può essere eseguito per inserire il numero 6, in quanto la cella che si trova diagonalmente verso l'alto alla destra del 5 risulta già occupata. Il 6 viene quindi scritto al di sotto del 5:

			2		
		1			
	5				
4	6				4
				3	
			2		

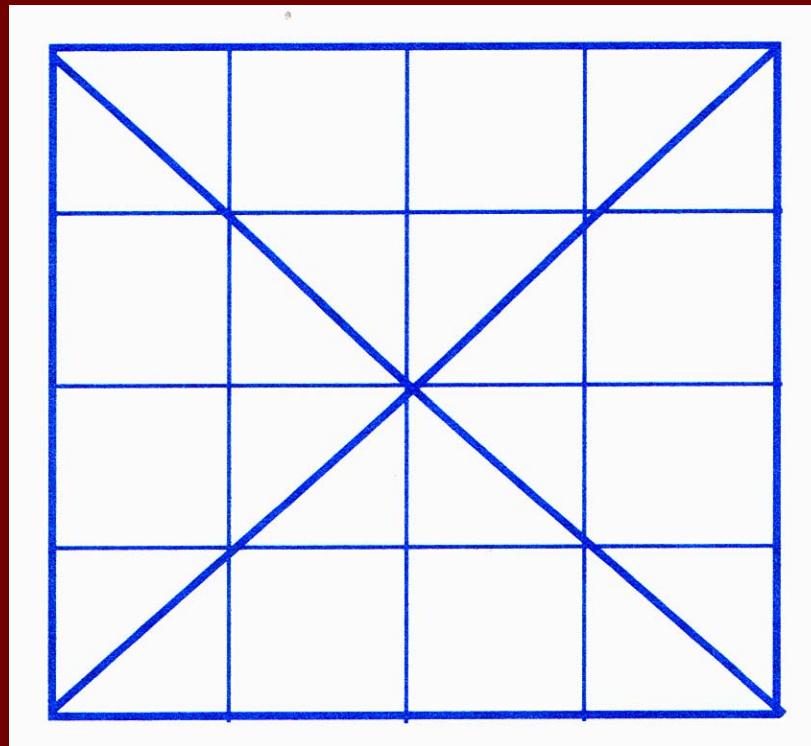
- 7. Procedendo allo stesso modo per i numeri rimanenti si otterrà il seguente quadrato:

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

- Il procedimento è lo stesso per ogni altro quadrato di ordine dispari.
- Per esercizio, ricostruire il Lo Shu con questo algoritmo

Costruzione di quadrati magici di ordine pari, multiplo di 4

Per costruire un quadrato di ordine 4, per prima cosa disegniamo le linee di intersezione attraverso le diagonali:



Disponiamo quindi i numeri come se fossero in successione, lasciando in bianco le celle attraversate dalle linee di intersezione. Iniziamo con l'1 nella cella in alto a sinistra: poichè tale cella è attraversata dalla diagonale, non scriviamo nulla. Passiamo a quella successiva alla sua destra e scriviamo il numero successivo, cioè il 2. Anche la terza cella è vuota, quindi inseriamo il numero 3. La quarta cella è attraversata dalla diagonale, pertanto non scriviamo alcun numero.

Passiamo quindi alla seconda riga del quadrato e procediamo in modo analogo a quanto visto per la prima riga fino a raggiungere l'ultima cella nell'angolo in basso a destra.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

Iniziamo ora dall'angolo in basso a destra e spostiamoci in orizzontale verso sinistra, inserendo i numeri soltanto nelle celle attraversate dalle diagonali. Cominciamo quindi mettendo l'1 nella cella in basso a destra. Le due celle alla sua sinistra sono piene, quindi raggiungiamo l'angolo in basso a sinistra e inseriamo il numero successivo, che è il 4, poichè il 2 e il 3 sono già stati inseriti. Procedendo nel modo indicato, si ottiene il seguente quadrato:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

- Un quadrato di ordine 8, invece, andrà considerato come l'insieme di quattro quadrati di ordine 4. Quindi, in questo caso, bisogna disegnare le diagonali in ognuno dei quattro quadranti.
- Dopo averle disegnate, si procede nel modo indicato per un quadrato di ordine 4, e si ottiene il quadrato seguente:

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

→

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1