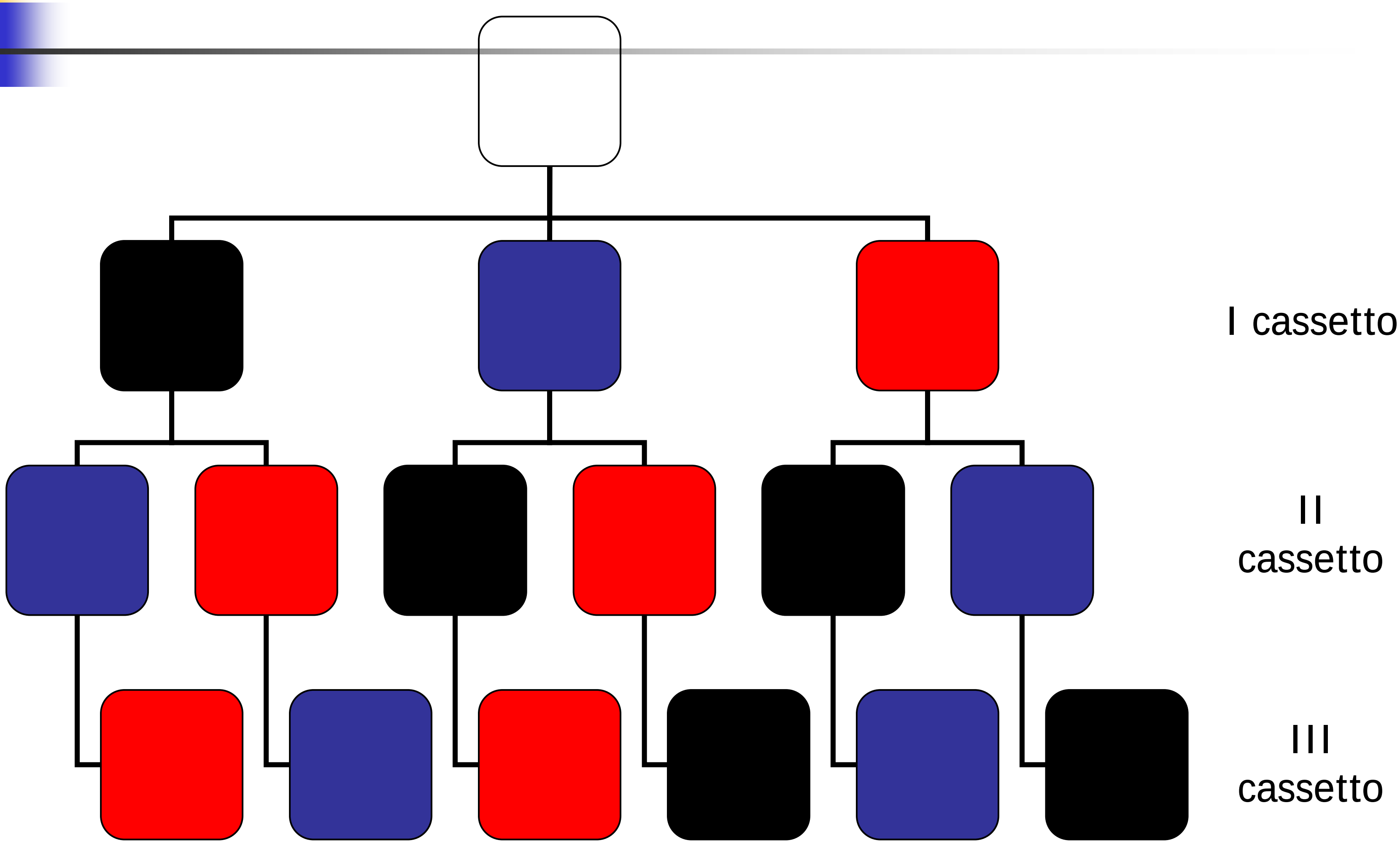
Calcolo combinatorio

Le permutazioni

- Partiamo da questo esercizio:

Un cartolaio ha nel suo negozio tre cassetti liberi; vuole sistemare in tali cassetti le penne biro nere, blu e rosse, suddivise secondo i colori. In quanti modi può disporre le penne nei cassetti?

Può essere d'aiuto il seguente diagramma ad albero



Ci sono, dunque, 6 diverse possibilità:

N-B-R

N-R-B

B-N-R

B-R-N

R-N-B

R-B-N

Cerchiamo di generalizzare il discorso.

Il cartolaio, quando doveva scegliere, aveva 3 diverse possibilità per il primo cassetto (N-B-R). Una volta scelto il tipo di penna da mettere nel I cassetto, gli rimanevano 2 alternative diverse per il II cassetto. Infine, per l’ultimo cassetto, la scelta era una ed obbligata.

Quindi, il numero totale delle possibilità sono:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

- Queste “possibilità”, in realtà, si chiamano ***permutazioni***.

Altro esempio:

In quanti modi diversi 6 persone possono sedersi nei 6 posti di uno scompartimento ferroviario?

6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1= 720

- In generale per “sistemare” n oggetti su n posti ci sono:

(*) $N \times (N-1) \times \ldots \times 2 \times 1$

diverse possibilità.

In matematica l’operazione (*) viene indicata con N! e si legge “n fattoriale” oppure “fattoriale di n”

Le Disposizioni semplici (o senza ripetizione).

- Consideriamo questo esempio.

Ci sono 5 alunni che entrano in un’aula dove ci sono 15 sedie. In quanti modi diversi possono sistemarsi gli alunni?

Ripetendo dall’esempio di prima, abbiamo:

15 x 14 x 13 x 12 x 11 = 360360 modi diversi.

- Questi diversi modi si chiamano “disposizioni” di 5 oggetti su 15 posti.

E’ evidente che se il numero degli oggetti è uguale al numero dei posti ricadiamo nel caso già visto ovvero nelle Permutazioni.

- E’ possibile dare, anche qui, una formula per il calcolo immediato delle disposizioni.

Nel nostro caso abbiamo

$$D(15;5) = \frac{15!}{(15-5)!} = \frac{15!}{10!} = \frac{15x14x13x12x11x10!}{10!} =$$

$$= 15x14x13x12x11 = 360360$$

Disposizioni con ripetizione.

- Quanti numeri diversi di 3 cifre si possono formare con i primi 5 numeri dispari?

I primi 5 numeri dispari sono, evidentemente: 1-3-5-7-9. Se vogliamo numeri da 3 cifre, allora per le centinaia ho 5 possibilità di scelta, come pure per le decine e le unità.

Dunque, ho in totale: $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ diverse possibilità.

Queste si chiamano “Disposizioni con ripetizione” per distinguerli da quelle precedenti che si chiamano “Disposizioni senza ripetizione” oppure semplicemente “Disposizioni”.

- In generale, il numero delle Disposizioni con ripetizione di n oggetti su k posti è:

$$D'_{n,k}=n^k$$

Ricapitolando

Permutazioni di n oggetti su n posti:

$$P_n = n!$$

Disposizioni semplici di n oggetti su k posti:

$$D_{n,k} = n!/(n-k)!$$

Disposizioni con ripetizione di n oggetti su k posti:

$$D'_{n,k} = n^k$$

Esercizi sulle permutazioni

- Scrivere gli anagrammi della parole ORE.
- Tre coppie di amici vanno a cenare in un ristorante. Viene assegnato loro un tavolo rettangolare a 6 posti. Le donne vogliono sedersi tutte e 3 su di un lato e gli uomini sul lato opposto. In quanti modi diversi si possono disporre?

[36]

Esercizi sulle disposizioni

- Nel campionato di calcio di Serie A, partecipano 20 squadre. Tre squadre, alla fine, del campionato retrocedono in serie B. In quanti modi si può fare la scelta ?

[6840]

- Quanti sono i possibili numeri di 5 cifre?

[90.000]