



Dipartimento di Scienze
Pedagogiche e Filosofiche



Grafi Pesati e Regole di Inferenza Locali

Antonio Ledda, Pietro Salaris, Marco Giunti

Giovedì 24 aprile 2008

Proponente: Netsoul srl 09126 Cagliari, via Asti 9

Coproponente: Dipartimento di Scienze Pedagogiche e Filosofiche Università degli Studi di Cagliari
09100 Cagliari via Is Mirrionis, 1 - Tel. (+39) 070290401 - Fax (+39) 0706757302

Bando per i "Progetti di ricerca e innovazione al di sotto della soglia de minimis" Por 2000-2006. Misura
3.13 pubblicato sul Buras n. 7 del 28/02/2004.

Titolo del progetto:

Conoscenze interattive distribuite: media asset management e semantic web

0.1 Introduzione

Muovendoci, almeno per il momento, con la massima libertà terminologica, consideriamo un insieme finito di oggetti e immaginiamo che tra questi oggetti siano date una serie di relazioni, ovvero esista un universo del discorso con una definita base di conoscenze; le domande che ci poniamo sono:

1. se una macchina inferenziale, provvista di opportune regole, sia in grado di aggiungere ulteriore informazione a quella già esplicitamente rappresentata nel database e, inoltre,
2. se sia possibile rappresentare l'informazione (sia quella iniziale, sia quella inferita, nonché altra eventualmente aggiunta in momenti successivi) in modo tale da organizzare automaticamente, via via che il database cresce o si modifica, i rapporti di rilevanza fra le diverse conoscenze immagazzinate.

Prima di affrontare esplicitamente queste domande, sarà utile introdurre con degli esempi alcuni concetti che, formalmente, definiremo più avanti. Immaginiamo di utilizzare un motore di ricerca (non è importante di quale tipo) di una cineteca per trovare un film che abbia certe caratteristiche (sentimentale, avventuroso, comico, ecc.) e immaginiamo, inoltre, di non avere un'idea precisa di quale titolo stiamo cercando, ovvero abbiamo solo la consapevolezza di volere un film sentimentale o avventuroso o comico ecc. In queste condizioni vaghe (fuzzy) vorremmo, perciò, avere la possibilità di inserire queste caratteristiche, o addirittura trasformarle con opportuni modificatori linguistici (molto, poco, abbastanza, appena, ecc.), in modo da ottenere, per esempio, un film molto comico, poco sentimentale, abbastanza avventuroso ecc. Questo significa, in termini più specifici, assegnare un valore di appartenenza compreso nell'intervallo $[0, 1]$ alle relazioni (ossia pesarle), in modo da ottenere una ricerca, per usare un linguaggio intuitivo, intelligente che ci aiuti nella scelta definitiva del film; inoltre nulla vieterebbe di allargare il discorso e affinare la ricerca attraverso il possibile inserimento di ulteriori relazioni aggiuntive (sempre fuzzy e quindi sempre pesate) relative, per esempio, agli attori, all'anno di produzione, al regista ecc.

Considerando un altro esempio, potremmo pensare di occuparci, invece che di film, di un corso di studi e-learning, comprendente diversi insegnamenti o esami; anche in questo caso, come per i film, le informazioni che ci interessano non sono informazioni generali, ma informazioni mirate, e perciò particolarmente adatte a una rappresentazione di tipo fuzzy. Un esempio potrebbe essere la propedeuticità tra i diversi esami del corso di studi, o fra le parti di uno stesso esame, oppure la maggiore utilità di un libro di testo rispetto a un altro, ecc. In queste condizioni è inoltre importante, dato un certo numero di esami, che le informazioni relative a ciascuno di essi possano incrociarsi tra loro contribuendo ad arricchire l'informazione di base relativa a ciascun esame. E' altresì chiaro che ciò potrebbe essere ottenuto se fossimo in grado di dare una risposta affermativa alle domande generali (1) e (2) poste sopra.

Il nostro approccio nell'affrontare tali domande utilizza gli strumenti formali della teoria dei grafi, nonché alcune nozioni di logica fuzzy. Come vedremo, la teoria dei grafi ci permetterà di rappresentare in maniera naturale e standardizzata una qualunque base di conoscenze che sia esprimibile come un insieme di enunciati semplici del primo ordine (cioè, enunciati che esprimono relazioni arbitrarie fra oggetti). Tale rappresentazione è in effetti un particolare grafo orientato ed etichettato.

Da un punto di vista applicativo, l'aspetto forse più interessante di questo tipo di rappresentazione consiste nel fatto che essa permette di affrontare il problema (2) in modo semplice e generale. Daremo infatti un metodo standard che ci permetterà di strutturare la base di conoscenze come una rete (grafo), in cui ciascun enunciato della base di conoscenze sarà rappresentato da un particolare percorso all'interno del grafo stesso. I rapporti di rilevanza fra i diversi enunciati di cui è costituita la base di conoscenze saranno quindi automaticamente rappresentati dai rapporti di connessione fra tali percorsi all'interno del grafo. Nel momento in cui il grafo si arricchisca di ulteriori percorsi a causa dell'immissione di nuove conoscenze (o anche per effetto dell'applicazione di un motore inferenziale) tali nuovi percorsi entreranno automaticamente in rapporto con i vecchi se ci saranno fra loro punti di intersezione. E' così possibile ipotizzare anche una misura della rilevanza fra percorsi (cioè fra enunciati) attraverso una quantificazione del numero di intersezioni fra due percorsi o, in mancanza di un'intersezione diretta, della loro distanza media.

Questo approccio basato sulla teoria dei grafi permette, inoltre, anche di affrontare il problema (1) in modo altrettanto semplice. Ciascuna regola di inferenza R di un possibile motore inferenziale che si applichi a una base di conoscenze strutturata secondo le linee delineate sopra (cioè, che si applichi al corrispondente grafo G) può anch'essa essere pensata come un particolare rapporto (di "implicazione") $R = (A \implies C)$ fra due grafi: un grafo "antecedente" A , che rappresenta la condizione di applicabilità della regola a G , e un grafo "conseguente" C , che rappresenta invece il modo in cui il grafo G dovrà essere arricchito nel caso in cui G soddisfi le condizioni specificate da A .

Nel seguito di questo rapporto tecnico, cercheremo di rendere rigoroso ciò che abbiamo descritto qui in modo soltanto intuitivo. A questo scopo ci avvarremo, come già detto, di strumenti formali tratti dalla teoria dei grafi e utilizzeremo inoltre alcune nozioni di logica fuzzy.

0.2 Definizioni di base

Definizione 1 Una *famiglia indicata* $(F_j)_{j \in J}$, è una funzione da J in O , ovvero una mappa dall'insieme non vuoto degli indici J all'insieme O di tutti gli oggetti che vogliamo indicizzare mediante J .

Definizione 2 Un *grafo diretto ed etichettato* G (o, più semplicemente, un *grafo* G) è una coppia ordinata $G = (N, (R_i)_{i \in I})$ dove N è un insieme finito e non vuoto di nodi e $(R_i)_{i \in I}$ una famiglia indicata di relazioni binarie su N .

Definizione 3 Sia $G = (N, (R_i)_{i \in I})$ un grafo diretto ed etichettato. Allora, chiamiamo ciascuna coppia $(i, R_i) \in (R_i)_{i \in I}$ una *relazione etichettata*. Quando ciò non crei ambiguità, identificheremo una relazione etichettata (i, R_i) con la stessa relazione R_i .

Definizione 4 Sia $G = (N, (R_i)_{i \in I})$ un grafo. Definiamo un *arco etichettato* di G come una qualunque coppia $(i, (n_1, n_2))$, tale che la coppia ordinata $(n_1, n_2) \in R_i$.

Definizione 5 Un *grafo pesato* PG (*p-grafo*) è una tripla $(N, (R_i)_{i \in I}, p)$ tale che $G = (N, (R_i)_{i \in I})$ sia un grafo e p una funzione dall'insieme degli archi etichettati di G all'intervallo chiuso $[0, 1] \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} = numeri reali).

Osservazione 6 Ricordiamo, per maggior chiarezza, che un arco etichettato con peso $p(i, (n_1, n_2)) = 0$ è determinato, cioè possiamo affermare con certezza che i nodi n_1 e n_2 stanno nella relazione R_i con un peso uguale a zero, ovvero che non stanno nella relazione R_i .

Definizione 7 Siano $PG_1 = (N, (R_i)_{i \in I}, p)$ e $PG_2 = (M, (S_j)_{j \in J}, q)$ due p -grafi. Una *regola di inferenza locale* (*l-regola*) è un'espressione del tipo: $PG_1 \implies PG_2$.¹

Il problema che ci poniamo adesso, è quello di utilizzare un p -grafo per rappresentare un qualunque insieme finito di fatti atomici, cioè fatti relativi a relazioni con arbitraria arietà $n \geq 1$. Una strada che si può percorrere per affrontare questo problema è quella di specializzare la struttura dei p -grafi, introducendo ulteriori condizioni, in modo da utilizzare fatti relativi a relazioni a due posti per rappresentare un qualunque fatto relativo a una relazione n -aria.

Partiamo dal caso più semplice, ovvero dalla rappresentazione dei fatti relativi a una relazione unaria (o proprietà) Y , ovvero di fatti del tipo x è Y , dove x è un qualunque oggetto che *gode di* Y , o a cui la proprietà Y *inerisce*. Ovviamente, tutti i fatti relativi a Y possono essere sempre pensati come fatti relativi alla relazione binaria di *inerenza*, all'oggetto x , della proprietà Y . Tale relazione binaria, nel linguaggio comune, è di solito espressa dal verbo essere in funzione di copula *è* di un predicato nominale, oppure da espressioni del tipo *gode di* o *inerisce a*. Nel seguito, per indicare la relazione binaria di inerenza noi utilizzeremo sempre la epsilon greca minuscola ε .

Esempio 8 Si rappresentino come fatti relativi alla relazione binaria di inerenza i seguenti fatti relativi alle relazioni unarie (proprietà) *passeggiare* e *correre*: (1) Giorgio passeggia; (2) Antonio corre.

1. $\varepsilon(g, P) :=$ a *Giorgio* inerisce il *passeggiare* := Giorgio passeggia

¹Rimandiamo, per una spiegazione intuitiva della definizione di *l-regola*, agli esempi che seguiranno.

$g := \text{Giorgio}$
 $P := \text{passeggiare}$

2. $\varepsilon(a, C) :=$ ad *Antonio* inerisce il *correre* := Antonio corre

$a := \text{Antonio}$
 $C := \text{correre}$

Resta ancora da affrontare il problema delle relazioni n -arie con $n > 2$. Per quanto riguarda tali relazioni, possiamo introdurre degli speciali indici, che ci permettano di rappresentare tutti i fatti ad esse relativi. L'idea è di utilizzare, come indici da apporre sugli archi del grafo, delle formule atomiche del I ordine. Chiariamo, sotto, il metodo generale attraverso un esempio.

Esempio 9 Supponiamo di voler rappresentare la relazione a quattro posti: x_1 dista da x_2 più di quanto x_3 dista da x_4 . Prendiamo, come indice generale di questa relazione la formula atomica aperta: $D(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Un qualunque fatto relativo a tale relazione quaternaria lo scomponiamo in 3 corrispondenti fatti relativi a relazioni binarie:

1. la prima con indice $D(-, -, a_3, a_4)$, dove a_3 e a_4 sono, rispettivamente, il terzo e il quarto individuo del fatto considerato;
2. la seconda con indice $D(a_1, -, -, a_4)$, dove a_1 e a_4 sono, rispettivamente, il primo e il quarto individuo del fatto considerato;
3. la terza con indice $D(a_1, a_2, -, -)$, dove a_1 e a_2 sono, rispettivamente, il primo e il secondo individuo del fatto considerato.

Supponiamo ora di avere 7 città: Parigi, Londra, Firenze, Empoli, Cambridge, Milano, Monza, e che vogliamo rappresentare come un grafo (per ora non pesato) i tre seguenti fatti:

- (a) Parigi dista da Londra più di quanto Firenze dista da Empoli
- (b) Parigi dista da Londra più di quanto Empoli dista da Firenze
- (c) Cambridge dista da Londra più di quanto Milano dista da Monza

avremo quindi un grafo con sette nodi:

$p =$ Parigi, $l =$ Londra, $f =$ Firenze, $e =$ Empoli, $c =$ Cambridge, $m =$ Milano, $z =$ Monza.

e gli archi orientati ed etichettati di questo grafo saranno:

$(D(-, -, e, f), (p, l))$
 $(D(-, -, f, e), (p, l))$
 $(D(-, -, m, z), (c, l))$
 $(D(p, -, -, e), (l, f))$
 $(D(p, -, -, f), (l, e))$
 $(D(c, -, -, z), (l, m))$

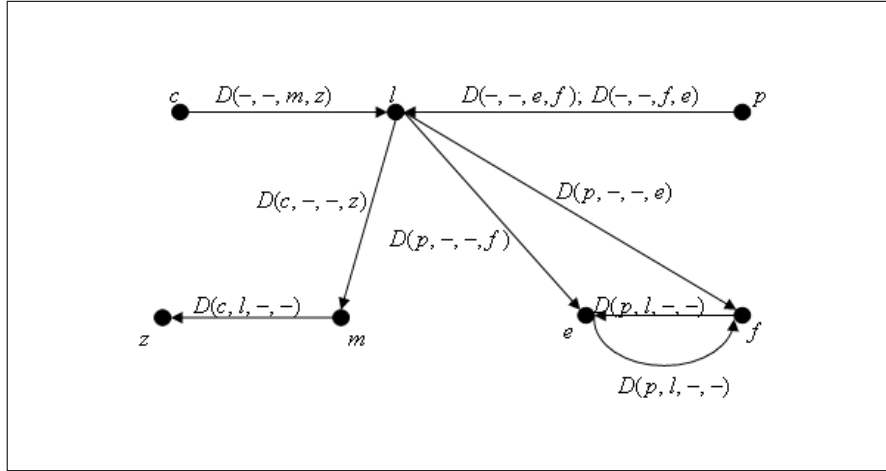


Figura 1: Grafo orientato ed etichettato per i fatti (a), (b) e (c).

$$\begin{aligned}
 &(D(p, l, -, -), (f, e)) \\
 &(D(p, l, -, -), (e, f)) \\
 &(D(c, l, -, -), (m, z)).
 \end{aligned}$$

Questo modo di rappresentare i fatti relativi a relazioni n -arie ci permette, dato un grafo così costruito, di estrarre da esso tutti e soli i fatti rappresentati. Ciò si ottiene considerando ciascuna etichetta di ciascun arco e inserendo al posto del primo trattino l'etichetta del nodo di partenza, e al posto del secondo trattino l'etichetta del nodo di arrivo. Si noti che, nella figura 1, lo stesso fatto corrisponde sempre a tre archi consecutivi. Sono quindi tali percorsi all'interno del grafo che possono essere considerati i veri e propri rappresentanti di un fatto. Nel grafo considerato tali percorsi sono esattamente tre, ciascuno dei quali rappresenta un fatto diverso. L'inizio di un percorso corrisponde sempre a un arco la cui etichetta ha i due trattini completamente a sinistra. La fine di un percorso a un arco la cui etichetta ha i due trattini completamente a destra.

Finora non abbiamo considerato i pesi. Rimane in effetti da affrontare il seguente problema. Supponiamo di aver costruito il grafo che rappresenta un certo insieme finito di fatti $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ relativi a relazioni n -arie (d'ora in avanti, per brevità, chiameremo un tale fatto fatto n -ario). Supponiamo inoltre che il peso attribuito al fatto n -ario f_i sia p_i . Quale peso dobbiamo allora attribuire agli $n - 1$ archi etichettati del grafo che rappresentano il fatto f_i ? Siccome, per quanto visto sopra, il fatto f_i è rappresentato da *ciascuno* di tali archi, la risposta più naturale consiste nell'attribuire lo *stesso* peso p_i a *tutti* gli archi etichettati che rappresentano il fatto n -ario f_i . In altri termini, tutti gli archi etichettati del percorso che rappresenta un certo fatto fatto n -ario f_i

hanno sempre lo stesso peso. Tale peso può quindi essere identificato con il peso dello stesso fatto f_i .

Osservazione 10 Un grafo orientato ed etichettato può essere pensato, indifferentemente, come rappresentante una congiunzione di enunciati semplici o l'insieme dei fatti corrispondenti a tali enunciati.

Come ci dobbiamo comportare se l'enunciato che vogliamo rappresentare contiene delle descrizioni definite, ovvero dei funtori? Per esempio, come dobbiamo rappresentare un enunciato del tipo:

1. la somma di 2 e 3 è 5

In generale per rappresentare, come grafo etichettato (ed eventualmente pesato), un enunciato dovremo introdurre tanti nodi quanti sono gli individui a cui quell'enunciato fa riferimento; si tratta quindi di etichettare anche tali nodi. Essi saranno, in effetti, etichettati con i nomi propri degli individui stessi e/o con le descrizioni definite di tali individui, essendo i nomi o le descrizioni desunte dall'enunciato stesso.

Esempio 11 Riprendendo l'enunciato 1, i nodi da etichettare sono tre, in quanto tale enunciato fa riferimento a tre individui: i numeri 2, 3 e 5. Essi saranno quindi etichettati dalle cifre: "2", "3", "5", che sono i nomi propri usati nell'enunciato 1. Tuttavia, il nodo con etichetta "5" dovrà anche avere l'etichetta corrispondente alla descrizione definita "la somma di 2 e 3", in quanto l'enunciato 1 fa riferimento al numero 5 anche mediante tale descrizione definita. Introducendo il funtore a due posti " $s(x_1, x_2)$ ", il nodo corrispondente al numero 5 sarà quindi etichettato sia dal nome proprio "5" sia dal termine " $s(2, 3)$ ".²

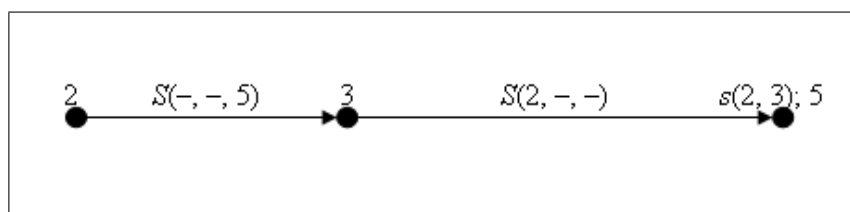


Figura 2: Grafo orientato ed etichettato che rappresenta l'enunciato 1.

²In quanto segue, non si farà distinzione fra un nodo e le sue etichette. Un nodo sarà cioè sempre identificato con una qualsiasi delle sue etichette o, viceversa, un'etichetta di un nodo con tale nodo. (Ciò semplifica la trattazione in quanto, altrimenti, dovremmo introdurre esplicitamente le etichette dei nodi, oltre che degli archi, nella definizione di un p -grafo.)

0.3 Condizioni di applicabilità ed effetto di una l -regola

Intuitivamente, una l -regola ci dice che, se in un dominio X valgono tutte le relazioni descritte dal p -grafo PG_1 , allora in tale dominio valgono anche tutte le relazioni descritte dal p -grafo PG_2 ; ovvero che, qualora in X si abbia il p -grafo PG_1 , esso può sempre essere arricchito con il p -grafo PG_2 . Intuitivamente, una l -regola $PG_1 \implies PG_2$ si applica a qualunque p -grafo PG in cui l'antecedente PG_1 della l -regola può essere immerso. Siccome, ovviamente, PG_1 è immergibile in PG_1 , le condizioni di applicabilità di una regola di inferenza locale $PG_1 \implies PG_2$ devono rispettare il requisito che tale l -regola si applichi sempre al suo antecedente, cioè al p -grafo PG_1 . In tal caso, l'effetto dell'applicazione della l -regola a PG_1 dovrà consistere nell'arricchire il p -grafo PG_1 con tutte le relazioni e i pesi specificati dal p -grafo PG_2 . Dobbiamo rendere tutto questo formalmente preciso attraverso una serie di definizioni.

Cominciamo col definire l'*arricchimento di un p -grafo* $PG = (X, (V_k)_{k \in K}, g)$ mediante un secondo p -grafo $PG_2 = (M, (S_j)_{j \in J}, q)$, che indicheremo con $PG \oplus PG_2$. L'operazione di arricchimento si applica a due qualunque p -grafi che soddisfino la seguente condizione di consistenza: $\forall j$, se $j \in J$ e $j \in K$, allora $S_j \cap V_j = \emptyset$; il risultato di tale operazione è un nuovo p -grafo definito sotto. La condizione di consistenza ci dice che ogni relazione S_j del p -grafo arricchente PG_2 , se omologa a una relazione V_j del p -grafo da arricchire PG , è però completamente disgiunta da essa, ovvero, che S_j può essere pensata come un'informazione completamente nuova da aggiungere a quella della relazione omologa V_j . Se tale condizione non fosse rispettata, potremmo trovarci in una situazione in cui i due p -grafi PG e PG_2 assegnano allo stesso arco etichettato $(j, (n_1, n_2))$ due pesi diversi, e, in tal caso, ci troveremmo poi in difficoltà nello stabilire quale dovrebbe essere il peso di tale arco nel p -grafo PG arricchito da PG_2 : dovrebbe essere il peso attribuito originariamente a esso da PG , quello attribuito da PG_2 , o una qualche funzione di tali due pesi? Per evitare di trovarci in una situazione del genere, in cui la determinazione del peso da attribuire (agli archi comuni di relazioni omologhe) dovrebbe comunque essere sufficientemente motivata, assumiamo per il momento la condizione di consistenza.

Definizione 12 Siano $PG = (X, (V_k)_{k \in K}, g)$ e $PG_2 = (M, (S_j)_{j \in J}, q)$ due p -grafi che soddisfino la seguente condizione:

- $\forall j$, se $j \in J$ e $j \in K$, allora $S_j \cap V_j = \emptyset$ (condizione di consistenza).

L'*arricchimento di PG mediante PG_2* , indicato con $PG \oplus PG_2$, è $(Z, (U_l)_{l \in L}, d)$ tale che:

1. $Z = X \cup M$;
2. $L = K \cup J$;
3. $\forall l \in L, \forall z_1, z_2 \in Z$, se $(z_1, z_2) \in U_l$, allora:

- (3.1) se $l \in K$ e $l \notin J$, allora $U_l = V_l$ e $d(l, (z_1, z_2)) = g(l, (z_1, z_2))$;
- (3.2) se $l \notin K$ e $l \in J$, allora $U_l = S_l$ e $d(l, (z_1, z_2)) = q(l, (z_1, z_2))$;
- (3.3) se $l \in K$ e $l \in J$, allora $U_l = V_l \cup S_l$ e, se $(z_1, z_2) \in V_l$, $d(l, (z_1, z_2)) = g(l, (z_1, z_2))$; se $(z_1, z_2) \in S_l$, $d(l, (z_1, z_2)) = q(l, (z_1, z_2))$.

Stabiliamo adesso, nell'ordine:

- I. sotto quali condizioni una l -regola $PG_1 \implies PG_2$ si applica a un p -grafo PG ;
- II. qualora una l -regola $PG_1 \implies PG_2$ si applichi a un p -grafo PG , quale sia l'effetto che l'applicazione di tale regola produce su PG .

Definizione 13 Siano $PG_1 = (N, (R_i)_{i \in I}, p)$ e $PG = (X, (V_k)_{k \in K}, g)$ due p -grafi; sia inoltre $f : N \rightarrow X$ una funzione; f è un'immersione di PG_1 in PG sse:

- 1. f è iniettiva;
- 2. sia $A(n_1, \dots, -, -, \dots, n_v)$ una qualunque formula atomica del primo ordine (in cui non occorran funtori), che contenga in esattamente due posti consecutivi il simbolo $-$; $\forall i \in I$, se l'indice i è della forma $A(n_1, \dots, -, -, \dots, n_v)$, allora $i^f = A(f(n_1), \dots, -, -, \dots, f(n_v))$; altrimenti, $i^f = i$; sia inoltre $I^f = \{y \mid y = i^f, \text{ per qualche } i \in I\}$; allora, $I^f \subseteq K$;
- 3. $\forall i \in I, \forall n_1, n_2 \in N$, se $(n_1, n_2) \in R_i$, allora $(f(n_1), f(n_2)) \in V_{i^f}$.

Definizione 14 Una l -regola $PG_1 \implies PG_2$ si applica a un p -grafo PG mediante una funzione f sse f è un'immersione di PG_1 in PG .

Definizione 15 Siano $PG_1 = (N, (R_i)_{i \in I}, p)$, $PG_2 = (M, (S_j)_{j \in J}, q)$ e $PG = (X, (V_k)_{k \in K}, g)$ tre p -grafi; sia f un'immersione di PG_1 in PG e sia $LR = (PG_1 \implies PG_2)$, una l -regola. Sia inoltre $h_f : M \rightarrow X \cup M$ la funzione iniettiva tale che, $\forall m \in M$, se $m \in N$, $h_f(m) = f(m)$; altrimenti, $h_f(m) = m$. Definiamo il p -grafo indotto (o trasportato) mediante h_f da LR , indicandolo con $h_f(LR)$, come segue.

$h_f(LR) = (M^{h_f}, (S_{j^{h_f}})_{j^{h_f} \in J^{h_f}}, q^{h_f})$ tale che:

- 1. $M^{h_f} = Im(h_f)$;
- 2. sia $A(n_1, \dots, -, -, \dots, n_v)$ una qualunque formula atomica del primo ordine (in cui non occorran funtori), che contenga in esattamente due posti consecutivi il simbolo $-$; $\forall j \in J$, se l'indice j è della forma $A(n_1, \dots, -, -, \dots, n_v)$, allora $j^{h_f} = A(h_f(n_1), \dots, -, -, \dots, h_f(n_v))$; altrimenti, $j^{h_f} = j$;

3. $J^{h_f} = \{y \mid y = j^{h_f}, \text{ per qualche } j \in J\}$;
4. $\forall j^{h_f} \in J^{h_f}, S_{j^{h_f}} = \{(h_f(n_1), h_f(n_2)) \mid (n_1, n_2) \in S_j\}$; (si noti che questa definizione della famiglia $(S_{j^{h_f}})_{j^{h_f} \in J^{h_f}}$ è ben data, perché, in base a 3. e 2., per ogni indice $r \in J^{h_f}$, esiste esattamente un $j \in J$ tale che $r = j^{h_f}$)
5. per ogni arco etichettato $(j^{h_f}, (h_f(n_1), h_f(n_2)))$ del grafo $(M^{h_f}, (S_{j^{h_f}})_{j^{h_f} \in J^{h_f}})$, q^{h_f} è definita come segue. Se esistono una funzione u e archi etichettati $(i_1, (y_1, z_1)), \dots, (i_v, (y_v, z_v))$ di PG_1 tali che $q(j, (n_1, n_2)) = u(p(i_1, (y_1, z_1)), \dots, p(i_v, (y_v, z_v)))$, allora $q^{h_f}(j^{h_f}, (h_f(n_1), h_f(n_2))) = u(g(i_1^f, (f(y_1), f(z_1))), \dots, g(i_v^f, (f(y_v), f(z_v))))$; altrimenti, $q^{h_f}(j^{h_f}, (h_f(n_1), h_f(n_2))) = q(j, (n_1, n_2))$.³

Definizione 16 Siano $PG_1 = (N, (R_i)_{i \in I}, p)$, $PG_2 = (M, (S_j)_{j \in J}, q)$ e $PG = (X, (V_k)_{k \in K}, g)$ tre p -grafi; sia f un'immersione di PG_1 in PG e sia $LR = (PG_1 \implies PG_2)$, una l -regola. Secondo la Definizione 14, LR si applica quindi a PG mediante f . Sia inoltre $h_f : M \rightarrow X \cup M$ la funzione iniettiva tale che, $\forall m \in M$, se $m \in N$, $h_f(m) = f(m)$; altrimenti, $h_f(m) = m$. Definiamo allora l'effetto di LR su PG mediante f , indicato da $LR(PG, f)$, come segue:

- i) se, $\forall j^{h_f}$ tale che $j^{h_f} \in J^{h_f}$ e $j^{h_f} \in K$, $S_{j^{h_f}} \cap V_{j^{h_f}} = \emptyset$, allora $LR(PG, f) = PG \oplus h_f(LR)$;
- ii) altrimenti, $LR(PG, f) = PG$.

Si noti che la definizione di effetto è data in forma condizionale perché, se la l -regola $LR = (PG_1 \implies PG_2)$ si applica a PG mediante f , in generale non è detto che PG e $h_f(LR)$ soddisfino la condizione di consistenza dell'operazione di arricchimento. Se non la soddisfano, allora l'effetto di LR su PG mediante f è definito come l'effetto nullo. Se la soddisfano, invece, l'effetto di LR su PG mediante f consiste nell'arricchire PG mediante il p -grafo $h_f(LR)$ indotto, mediante h_f , dalla l -regola LR .

Prima di procedere oltre, cerchiamo di chiarire con alcuni esempi le definizioni precedenti. Ometteremo, per semplicità, da questo primo esempio i pesi delle relazioni.

Esempio 17 Si consideri la regola di inferenza locale LR corrispondente alla seguente implicazione: se il protagonista x_1 di x_2 è x_3 , allora x_3 è un personaggio *principale* di x_2 . Data la seguente interpretazione, la regola LR è rappresentata in figura 3.

³Si noti che la definizione di q_f^h è data in forma condizionale per fare in modo che la definizione stessa si applichi a l -regole del tipo di Lr1 (si veda la figura 9). Infatti, per regole di questo tipo, la condizione del punto 5 si applica, perché i pesi del grafo conseguente PG_2 sono funzione dei pesi del grafo antecedente PG_1 (nel caso particolare di Lr1, la funzione u è la t -norma corrispondente al prodotto algebrico).

$r := principale$

$P(x_1, x_2, x_3) :=$ il protagonista x_1 di x_2 è x_3 [rel. tern. univoca a destra]

$p(x_1, x_2) :=$ il protagonista x_1 di x_2 [functore corrispondente]

$R(y_1, y_2, y_3) := y_1$ è un personaggio y_2 di y_3 [rel. ternaria]

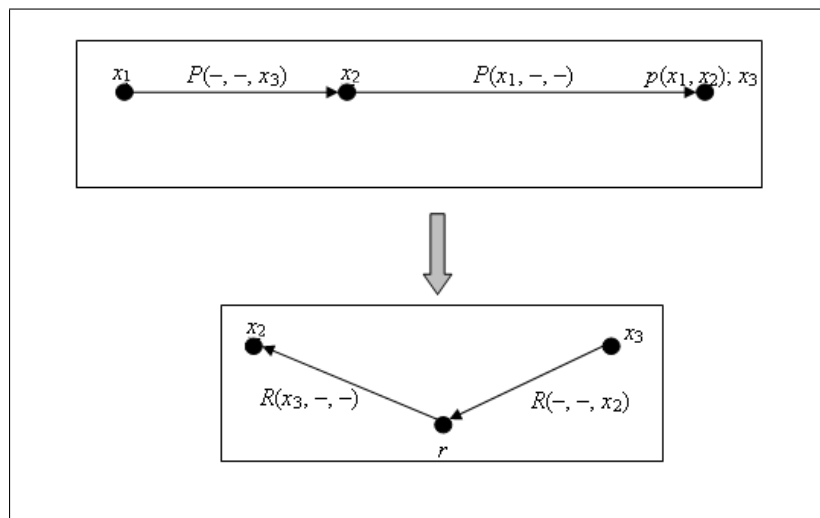


Figura 3: La regola di inferenza locale LR .

Sia dato ora il seguente enunciato L , con la corrispondente formalizzazione:
il protagonista maschile dei Promessi Sposi è Renzo.

$m := maschile$

$p := I Promessi Sposi$

$n := Renzo$

$P(m, p, n) :=$ il protagonista *maschile* dei *Promessi Sposi* è *Renzo*

$p(m, p) :=$ il protagonista *maschile* dei *Promessi Sposi*

La figura 4 mostra il p -grafo che rappresenta l'enunciato L . Chiamiamo tale p -grafo GL .

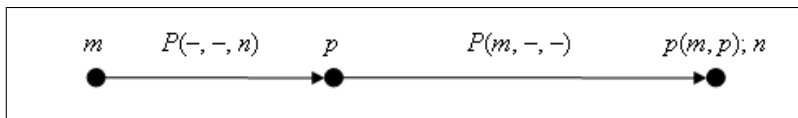


Figura 4: Il p -grafo GL che rappresenta l'enunciato L .

Applicando la LR a GL otteniamo il p -grafo rappresentato in figura 5.

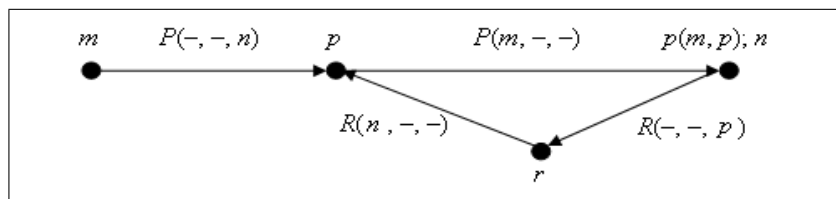


Figura 5: Il p -grafo GL arricchito dall'applicazione della l -regola LR .

Esempio 18 Si costruisca il p -grafo corrispondente al seguente insieme di enunciati:

1. L'autore dei Promessi Sposi è nato nel 1785;
2. L'autore dei Promessi Sposi è Alessandro Manzoni;
3. Il nome proprio di Alessandro Manzoni è "Alessandro";
4. Il cognome di Alessandro Manzoni è "Manzoni";
5. Il titolo dei Promessi Sposi è "I Promessi Sposi";
6. Il genere del romanzo I Promessi Sposi è storico;
7. Il protagonista maschile dei Promessi Sposi è Renzo;
8. La protagonista femminile dei Promessi Sposi è Lucia;
9. Don Abbondio è un personaggio principale dei Promessi Sposi;
10. Don Rodrigo è un personaggio principale dei Promessi Sposi;
11. Agnese è un personaggio secondario dei Promessi Sposi.

Scriviamo ora le interpretazioni:

o := *Alessandro Manzoni*
 1785 := l'anno *1785*
 a := il nome proprio "*Alessandro*"
 i := il cognome "*Manzoni*"
 p := *I Promessi Sposi*
 t := il titolo "*I Promessi Sposi*"
 z := *romanzo*
 s := *storico*
 r := *principale*
 c := *secondario*
 m := *maschile*

$f :=$ *femminile*
 $n :=$ *Renzo*
 $l :=$ *Lucia*
 $d :=$ *Don Abbondio*
 $g :=$ *Don Rodrigo*
 $e :=$ *Agnese*

$A(x_1, x_2) :=$ l'autore di x_1 è x_2 (relazione binaria univoca a destra)

$a(x_1) :=$ l'autore di x_1

$F(x_1, x_2) :=$ il nome proprio di x_1 è x_2 (relazione binaria univoca a destra)

$f(x_1) :=$ il nome proprio di x_1

$C(x_1, x_2) :=$ il cognome di x_1 è x_2 (relazione binaria univoca a destra)

$c(x_1) :=$ il cognome di x_1

$T(x_1, x_2) :=$ il titolo di x_1 è x_2 (relazione binaria univoca a destra)

$t(x_1) :=$ il titolo di x_1

$G(x_1, x_2, x_3) :=$ il genere dell' x_1 x_2 è x_3 (relazione ternaria univoca a destra)

$g(x_1, x_2) :=$ il genere dell' x_1 x_2

$P(x_1, x_2, x_3) :=$ il protagonista x_1 di x_2 è x_3 (relazione ternaria univoca a destra)

$p(x_1, x_2) :=$ il protagonista x_1 di x_2

$R(x_1, x_2, x_3) :=$ x_1 è un personaggio x_2 di x_3 (relazione ternaria).

Si intende che il peso di tutti i fatti sia pari a 1, quindi, per semplicità, tali pesi sono stati omessi dal p -grafo.

Esempio 19 Arricchire il p -grafo rappresentato in figura 6 con le l -regole corrispondenti alle seguenti implicazioni (si veda figura 7):

1. se il titolo di x_1 è x_2 , allora x_1 è un'*opera artistica* (utilizzare la relazione a tre posti: x_1 è un x_2 x_3 , dove x_1 è sostituibile da un nome proprio, x_2 da un nome comune, e x_3 da un aggettivo);
2. se x_1 è un'*opera artistica*, allora x_1 è un'*opera umana* (suggerimento: vedi sopra);

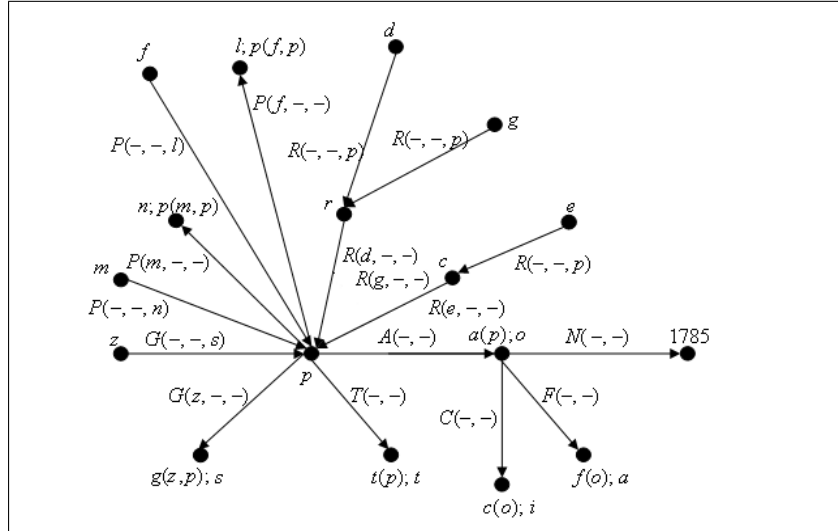


Figura 6: Il p -grafo che rappresenta l'insieme di enunciati dell'esempio 18.

3. se x_1 è un x_2 x_3 , allora x_1 è un x_2 (esempio: se x_1 è un *opera artistica*, allora x_1 è un'*opera*);
4. se il genere dell' x_1 x_2 è x_3 , allora x_2 è un x_1 x_3 (dove x_1 è sostituibile da un nome comune appropriato, x_2 da un nome proprio appropriato, e x_3 da un aggettivo appropriato);
5. se il protagonista x_1 di x_2 è x_3 , allora x_3 è un protagonista di x_2 (dove x_1 è sostituibile da un aggettivo appropriato, x_2 da un nome proprio appropriato, e x_3 da un nome proprio arbitrario);
6. se x_1 è un x_2 di x_3 , allora x_1 è un x_2 (dove x_1 è sostituibile da un nome proprio, x_2 da un nome comune, e x_3 da un nome proprio);
7. se x_1 è un personaggio x_2 di x_3 , allora x_1 è un *personaggio* x_2 di x_3 ;
8. se x_1 è un x_2 x_3 di x_4 , allora x_1 è un x_2 x_3 ;
9. se x_1 è un x_2 x_3 di x_4 , allora x_1 è un x_2 di x_4 ;
10. se x_1 è un *personaggio*, allora x_1 è *fittizio* (si considerino " x_1 è un x_2 " e " x_1 è x_2 " come due diverse relazioni a due posti: la prima esprime l'appartenenza dell'individuo x_1 alla classe o al tipo di individui x_2 [in questo caso, $x_2 = b =$ personaggio] mentre la seconda esprime l'inerenza della proprietà x_2 [in questo caso $x_2 = k =$ fittizio] all'individuo x_1);
11. se il protagonista x_1 di x_2 è x_3 , allora x_3 è un personaggio *principale* di x_2 .

$I(x_1, x_2) := x_1 \text{ è } x_2$ (relazione binaria).

Esempio 20 Si costruisca il p -grafo corrispondente al seguente insieme di enunciati (si veda figura 8):

1. il modulo primo del corso di filosofia della mente e IA è propedeutico al modulo secondo, con peso $r_1 \in [0, 1]$;
2. il modulo secondo del corso di filosofia della mente e IA è propedeutico al modulo terzo, con peso $r_2 \in [0, 1]$;
3. la parte prima del corso di filosofia della mente e IA è il modulo primo, con peso $w_1 \in [0, 1]$;
4. la parte seconda del corso di filosofia della mente e IA è il modulo secondo, con peso $w_2 \in [0, 1]$;
5. la parte terza del corso di filosofia della mente e IA è il modulo terzo, con peso $w_3 \in [0, 1]$;

$c_1 :=$ il corso di filosofia della mente e IA

$n_1 :=$ il modulo primo del corso di filosofia della mente e IA

$n_2 :=$ il modulo secondo del corso di filosofia della mente e IA

$n_3 :=$ il modulo terzo del corso di filosofia della mente e IA

$1^\circ :=$ prima

$2^\circ :=$ seconda

$3^\circ :=$ terza

$R(x_1, x_2), r_i :=$ x_1 è propedeutico a x_2 , con peso r_i

$P(x_1, x_2, x_3), w_j :=$ la parte x_1 di x_2 è x_3 , con peso w_j

$p(x_1, x_2) :=$ la parte x_1 di x_2 .

Esempio 21 Si arricchisca il p -grafo dell'esempio 20 con la l -regola Lr1 (si veda figura 9) corrispondente all'implicazione: se $R(x_1, x_2)$, con peso r_i e $R(x_2, x_3)$, con peso r_k , allora $R(x_1, x_3)$, con peso $r_i * r_k$.⁴

Nella figura 10 vediamo l'arricchimento indotto dalla Lr1.

⁴Lr1 esprime la transitività della propedeuticità; $*$ è la t -norma corrispondente al prodotto algebrico.

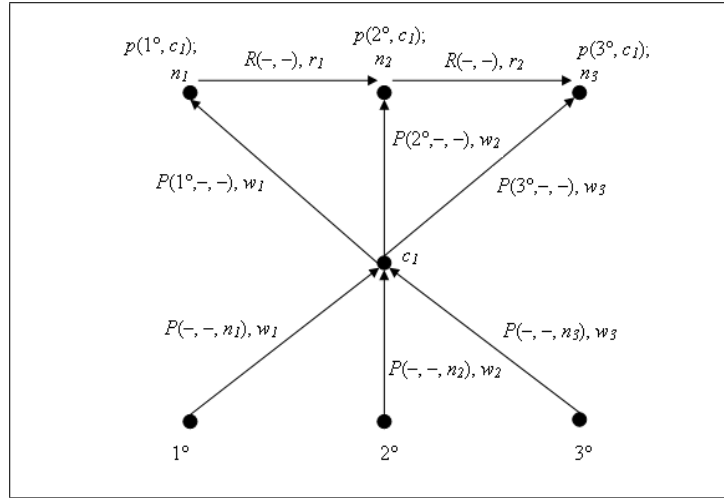


Figura 8: Il p -grafo che rappresenta l'insieme di enunciati dell'esempio 20.

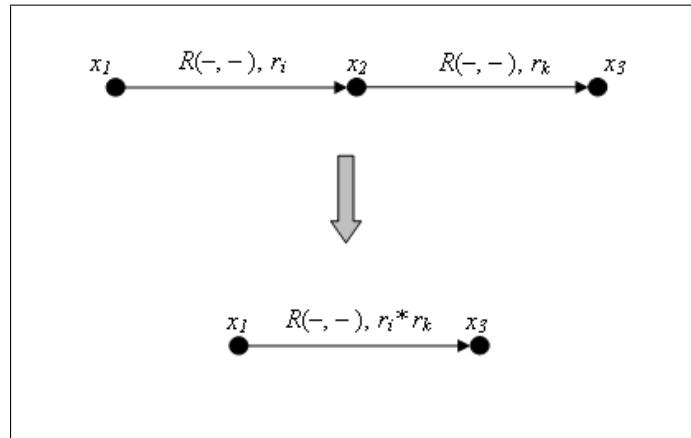


Figura 9: La regola di inferenza locale Lr1

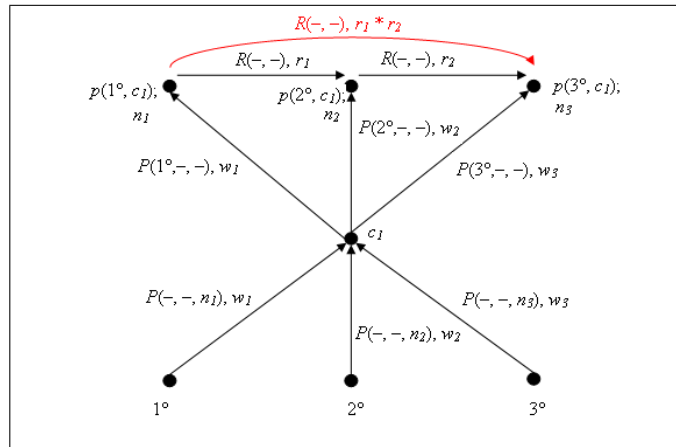


Figura 10: Il p -grafo di figura 8 arricchito dalla l -regola Lr1.

0.4 Rappresentazione standard di una base di conoscenze

Gli esempi precedenti suggeriscono alcune considerazioni generali sul tipo di relazioni e di oggetti rappresentati da un p -grafo; per primo si nota che i nodi di un p -grafo rappresentano *oggetti* di almeno tre tipi:

1. nodi (che contrassegneremo con lettere minuscole corsive) che rappresentano *individui* (espressi nel linguaggio comune da *nomi propri*);
2. nodi (che contrassegneremo con lettere minuscole in grassetto corsivo) che rappresentano **classi** o **insiemi** (espressi nel linguaggio comune da **nomi comuni**);
3. nodi (che contrassegneremo con lettere maiuscole corsive) che rappresentano *PROPRIETÀ* (esprese nel linguaggio comune da *AGGETTIVI*).

Per quanto riguarda poi le relazioni che sussistono fra i nodi, risultano importanti le due relazioni binarie di *appartenenza* (che si applica a un oggetto e a una classe o insieme) e di *inerenza* (fra un oggetto e una proprietà). Stabiliamo di indicare tali relazioni con la *epsilon* greca. La prima relazione, con la epsilon usata per il segno di appartenenza fra insiemi, e cioè \in ; la seconda, con la epsilon usuale, e cioè ε .

Esempio 22 Formalizzare i seguenti fatti:

1. Giorgio è bello

$g := \textit{Giorgio}$

$B := BELLO$
 $\varepsilon(x_1, X_2) := x_1 \text{ è } X_2$
 $\varepsilon(g, B) := \text{Giorgio è } BELLO$

2. Giorgio è un uomo

$g := \text{Giorgio}$
 $\mathbf{u} := \text{uomo}$
 $\varepsilon(x_1, \mathbf{x}_2) := x_1 \text{ è un } \mathbf{x}_2$
 $\varepsilon(g, \mathbf{u}) := \text{Giorgio è un } \mathbf{uomo}$

Possiamo costruire *relazioni* a tre e quattro posti aggiungendo proprietà e individui alla relazione base di appartenenza.

Esempio 23 Formalizzare i seguenti fatti:

1. Gianni è un uomo

$g := \text{Gianni}$
 $\mathbf{u} := \text{uomo}$
 $\varepsilon(x_1, \mathbf{x}_2) := x_1 \text{ è un } \mathbf{x}_2$
 $\varepsilon(g, \mathbf{u}) := \text{Gianni è un } \mathbf{uomo}$

2. Gianni è un uomo giovane

$G := GIOVANE$
 $\varepsilon(x_1, \mathbf{x}_2, X_3) := x_1 \text{ è un } \mathbf{x}_2 X_3$
 $\varepsilon(g, \mathbf{u}, G) := \text{Gianni è un } \mathbf{uomo GIOVANE}$

3. Gianni è un uomo di Salerno

$s := \text{Salerno}$
 $\varepsilon(x_1, \mathbf{x}_2, x_3) := x_1 \text{ è un } \mathbf{x}_2 \text{ di } x_3$
 $\varepsilon(g, \mathbf{u}, s) := \text{Gianni è un } \mathbf{uomo} \text{ di } \text{Salerno}$

4. Gianni è un uomo giovane di Salerno

$\varepsilon(x_1, \mathbf{x}_2, X_3, x_4) := x_1 \text{ è un } \mathbf{x}_2 X_3 \text{ di } x_4$
 $\varepsilon(g, \mathbf{u}, G, s) := \text{Gianni è un } \mathbf{uomo GIOVANE} \text{ di } \text{Salerno}.$

Lo schema può essere ulteriormente arricchito permettendo, dopo il secondo posto, un numero qualunque di proprietà che qualificano la classe e, dopo di esse, un numero qualunque di individui. Di norma, la forma generale di una relazione di appartenenza è perciò la seguente:

• $\varepsilon(x_0 : \mathbf{x}, X, \dots : x_1; x_2; \dots)$

In una forma ancora più generale, lo schema delle relazioni di appartenenza è il seguente:

$$\bullet \in (\mathbf{x}_0, X_0, \dots, o_0 : \mathbf{x}, X, \dots : \mathbf{x}_1, X_1, \dots, o_1; \mathbf{x}_2, X_2, \dots, o_2; \dots)$$

In quest'ultimo schema, \mathbf{x} è una classe, X, \dots sono un numero finito di proprietà che qualificano tale classe (possono anche non esserci), o_i ($0 \leq i$) è un oggetto arbitrario, ovvero, un individuo, una classe, o una proprietà, e ciascuna stringa $\mathbf{x}_i, X_i, \dots, o_i$ ($0 \leq i$) è una successione finita di oggetti il cui primo elemento è una classe (può non esserci), i cui elementi centrali sono proprietà che qualificano la classe (possono non esserci), e il cui elemento finale è un oggetto di quella classe qualificata. Tali successioni sono al massimo un numero finito ma, a parte quella con indice 0, possono anche mancare tutte. Si tenga presente che il corrispettivo di una tale successione nel linguaggio ordinario è costituito da un **nome comune** seguito da un *AGGETTIVO QUALIFICATIVO* e da un *nome proprio*, dove il nome comune ha la funzione di apposizione del nome proprio (es.: **il romanzo** *STORICO* *I Promessi Sposi*; **l'imperatore** *ASBURGICO* *Carlo V*).

Per quanto riguarda le relazioni di inerenza, la loro forma generale è la seguente:

$$\bullet \varepsilon (\mathbf{x}_0, X_0, \dots, o_0 : X, \dots : \mathbf{x}_1, X_1, \dots, o_1; \mathbf{x}_2, X_2, \dots, o_2; \dots)$$

In questo schema, analogamente a quello per l'appartenenza, X, \dots sono un numero finito di proprietà (deve essercene almeno una), o_i ($0 \leq i$) è un oggetto arbitrario (individuo, classe, o proprietà) e, per le stringhe $\mathbf{x}_i, X_i, \dots, o_i$ ($0 \leq i$), vale quanto detto sopra.

Oltre alle due relazioni di *appartenenza* e di *inerenza*, che corrispondono ai *due sensi predicativi* del verbo essere e cioè, rispettivamente, alla predicazione *sostanziale* e a quella *accidentale*, dobbiamo poi considerare anche il caso in cui il verbo essere esprima un'*identità*. Indicheremo questo genere di relazioni con il simbolo =.

Esempio 24 Formalizzare i seguenti fatti:

1. La somma di due e tre è cinque

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &:= \text{somma} \\ 2 &:= \text{due} \\ 3 &:= \text{tre} \\ 5 &:= \text{cinque} \\ =(\mathbf{x}_1, x_2, x_3, x_4) &:= \text{l}'\mathbf{x}_1 \text{ di } x_2 \text{ e } x_3 \text{ è } x_4 \\ =(\mathbf{s}, 2, 3, 5) &:= \text{la } \mathbf{s} \text{ di } 2 \text{ e } 3 \text{ è } 5 \end{aligned}$$

2. Il fidanzato di Carla è Luca

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &:= \text{fidanzato} \\ c &:= \text{Carla} \\ l &:= \text{Luca} \end{aligned}$$

$=(\mathbf{x}_1, x_2, x_3) := \text{l}'\mathbf{x}_1 \text{ di } x_2 \text{ è } x_3$
 $=(\mathbf{f}, c, l) := \text{il } \mathbf{fidanzato} \text{ di } \textit{Carla} \text{ è } \textit{Luca}.$

Ora, analogamente allo schema dell'appartenenza, lo schema generale dell'identità è il seguente:

• $=(\mathbf{x}, X, \dots : \mathbf{x}_1, X_1, \dots, o_1; \mathbf{x}_2, X_2, \dots, o_2; \dots : \mathbf{x}_0, X_0, \dots, o_0)$

Si noti che l'analogia con lo schema dell'appartenenza sarebbe perfetta se la stringa $\mathbf{x}_0, X_0, \dots, o_0$ fosse al primo posto invece che all'ultimo; in effetti, si potrebbe scegliere come schema dell'identità anche la forma invertita:

• $=(\mathbf{x}_0, X_0, \dots, o_0 : \mathbf{x}, X, \dots : \mathbf{x}_1, X_1, \dots, o_1; \mathbf{x}_2, X_2, \dots, o_2; \dots)$

Nel seguito, tuttavia, utilizzeremo soltanto il primo schema, perché i p -grafi corrispondenti alle relazioni di identità espresse secondo tale schema hanno una lettura molto più intuitiva ed immediata.

Le relazioni di identità hanno inoltre un'altra importante peculiarità. Data una qualunque relazione di identità ottenuta dal primo dei due schemi sopra, se eliminiamo da essa la stringa $\mathbf{x}_0, X_0, \dots, o_0$, otteniamo sempre una *descrizione definita* dell'oggetto o_0 . Lo schema generale delle descrizioni definite corrispondenti alle relazioni di identità è il seguente:

• $\mathbf{x}(X, \dots : \mathbf{x}_1, X_1, \dots, o_1; \mathbf{x}_2, X_2, \dots, o_2; \dots).$

Esempio 25 Scrivere le descrizioni definite corrispondenti alle identità dell'esempio 24.

1. La somma di due e di tre

$\mathbf{x}_1(x_2, x_3) := \text{l}'\mathbf{x}_1 \text{ di } x_2 \text{ e } x_3$
 $\mathbf{s}(2, 3) := \text{la } \mathbf{somma} \text{ di } \textit{due} \text{ e di } \textit{tre}$

2. Il fidanzato di Carla

$\mathbf{x}_1(x_2) := \text{l}'\mathbf{x}_1 \text{ di } x_2$
 $\mathbf{f}(c) := \text{il } \mathbf{fidanzato} \text{ di } \textit{Carla}.$

Esempio 26 Disegnare il p -grafo dell'esempio 20 adeguandolo alle nuove relazioni (si veda figura 11).

1. il modulo primo del corso di filosofia della mente e IA è propedeutico al modulo secondo, con peso $r_1 \in [0, 1]$;
2. il modulo secondo del corso di filosofia della mente e IA è propedeutico al modulo terzo, con peso $r_2 \in [0, 1]$;

3. la parte prima del corso di filosofia della mente e IA è il modulo primo, con peso $w_1 \in [0, 1]$;
4. la parte seconda del corso di filosofia della mente e IA è il modulo secondo, con peso $w_2 \in [0, 1]$;
5. la parte terza del corso di filosofia della mente e IA è il modulo terzo, con peso $w_3 \in [0, 1]$.

Consideriamo per semplicità tutti i pesi dei fatti pari a 1. Essi non verranno quindi indicati nel p -grafo corrispondente.

Individui (nomi propri) rappresentati dai nodi neri

$f := \textit{filosofia della mente}$

$i := \textit{intelligenza artificiale}$

Classi (nomi comuni) rappresentati dai nodi rossi

$m := \textbf{modulo}$

$c := \textbf{corso}$

$p := \textbf{parte}$

Proprietà (aggettivi) rappresentati dai nodi verdi

1° := *PRIMO*

2° := *SECONDO*

3° := *TERZO*

$R := \textit{PROPEDEUTICO}$

Relazioni (di identità e di inerenza).

$=(\mathbf{x}_1, X_2, x_3, x_4) := \textit{l}'\mathbf{x}_1 X_2 \textit{ di } x_3 \textit{ è } x_4 \textit{ [rel. quaternaria di identità]}$

(il **modulo/parte** *PRIMO/SECONDO/TERZO* di x_3 è x_4);

$\mathbf{x}_1(X_2, x_3) := \textit{l}'\mathbf{x}_1 X_2 \textit{ di } x_3 \textit{ [funtoe corrispondente]}$

(il **modulo/parte** *PRIMO/SECONDO/TERZO* di x_3);

$=(\mathbf{x}_1, x_2, x_3, x_4) := \textit{l}'\mathbf{x}_1 \textit{ di } x_2 \textit{ e } x_3 \textit{ è } x_4 \textit{ [rel. quaternaria di identità]}$

(il **corso** di x_2 e x_3 è x_4);

$\mathbf{x}_1(x_2, x_3) := \textit{l}'\mathbf{x}_1 \textit{ di } x_2 \textit{ e } x_3 \textit{ [funtoe corrispondente]}$

(il **corso** di x_2 e x_3);

$\varepsilon(x_1, X_2, x_3) := x_1 \textit{ è } X_2 \textit{ a } x_3 \textit{ [relazione ternaria di inerenza]}$

(x_1 è *PROPEDEUTICO* a x_3).

Il grafo avrà sei nodi per individui, le cui nove etichette saranno le seguenti. (Si noti che tre individui hanno doppia etichetta, in quanto ci si riferisce ad essi con due diverse descrizioni definite: il modulo primo/secondo/terzo del corso di filosofia della mente e intelligenza artificiale = la parte prima/seconda/terza del corso di filosofia della mente e intelligenza artificiale.)

$f := \textit{filosofia della mente}$

$i := \textit{intelligenza artificiale}$

$c(f, i)$:= il **corso** di *filosofia della mente e intelligenza artificiale*
 $m(1^\circ, c(f, i))$:= il **modulo** *PRIMO* del **corso** di *filosofia della mente e intelligenza artificiale*
 $m(2^\circ, c(f, i))$:= il **modulo** *SECONDO* del **corso** di *filosofia della mente e intelligenza artificiale*
 $m(3^\circ, c(f, i))$:= il **modulo** *TERZO* del **corso** di *filosofia della mente e intelligenza artificiale*
 $p(1^\circ, c(f, i))$:= la **parte** *PRIMA* del **corso** di *filosofia della mente e intelligenza artificiale*
 $p(2^\circ, c(f, i))$:= la **parte** *SECONDA* del **corso** di *filosofia della mente e intelligenza artificiale*
 $p(3^\circ, c(f, i))$:= la **parte** *TERZA* del **corso** di *filosofia della mente e intelligenza artificiale*.

Per una migliore comprensione visiva del p -grafo, per ciascun fatto in esso rappresentato segneremo una sola etichetta, che posizioneremo sull'arco di partenza del percorso che rappresenta il fatto; inoltre, denotiamo i nodi che non hanno un nome individuale nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 c_1 &:= c(f, i) \\
 n_1 &:= m(1^\circ, c(f, i)) = p(1^\circ, c(f, i)) \\
 n_2 &:= m(2^\circ, c(f, i)) = p(2^\circ, c(f, i)) \\
 n_3 &:= m(3^\circ, c(f, i)) = p(3^\circ, c(f, i)).
 \end{aligned}$$

Applicando la regola Lr1 al p -grafo di figura 11 otteniamo il p -grafo mostrato in figura 12.

Supponiamo adesso di avere un secondo corso, per esempio di logica.

Esempio 27 Aggiungere al p -grafo della figura 12 la rappresentazione dei seguenti fatti (si veda figura 13):

- il modulo primo del corso di logica è una parte della parte prima del corso di logica;
- il modulo secondo del corso di logica è una parte della parte prima del corso di logica.

Individui (nomi propri)

l := *logica*

Classi (nomi comuni)

m := **modulo**

c := **corso**

p := **parte**

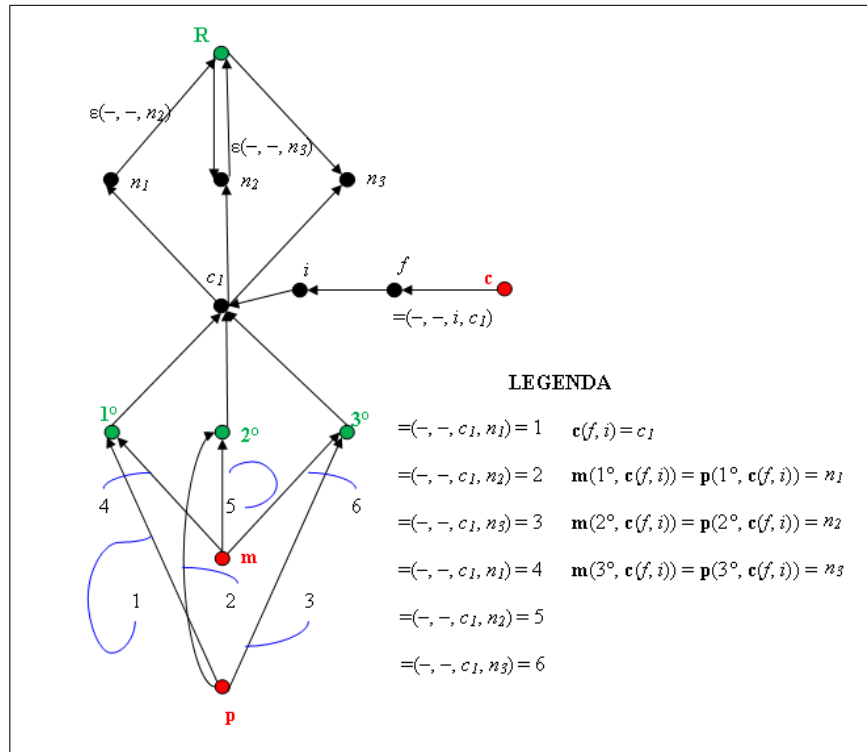


Figura 11: Il p -grafo dell'esempio 20 modificato.

Proprietà (aggettivi)

$1^\circ := \text{PRIMO}$

$2^\circ := \text{SECONDO}$

Relazione di appartenenza

$\varepsilon(x_1, \mathbf{x}_2, x_3) := x_1$ è un \mathbf{x}_2 di x_3 (x_1 è una **parte** di x_3).

Indicheremo i nuovi nodi che non hanno un nome proprio nel seguente modo:

$c_2 := \mathbf{c}(l)$

$m_1 := \mathbf{m}(1^\circ, \mathbf{c}(l))$

$p_1 := \mathbf{p}(1^\circ, \mathbf{c}(l))$

$m_2 := \mathbf{m}(2^\circ, \mathbf{c}(l))$.

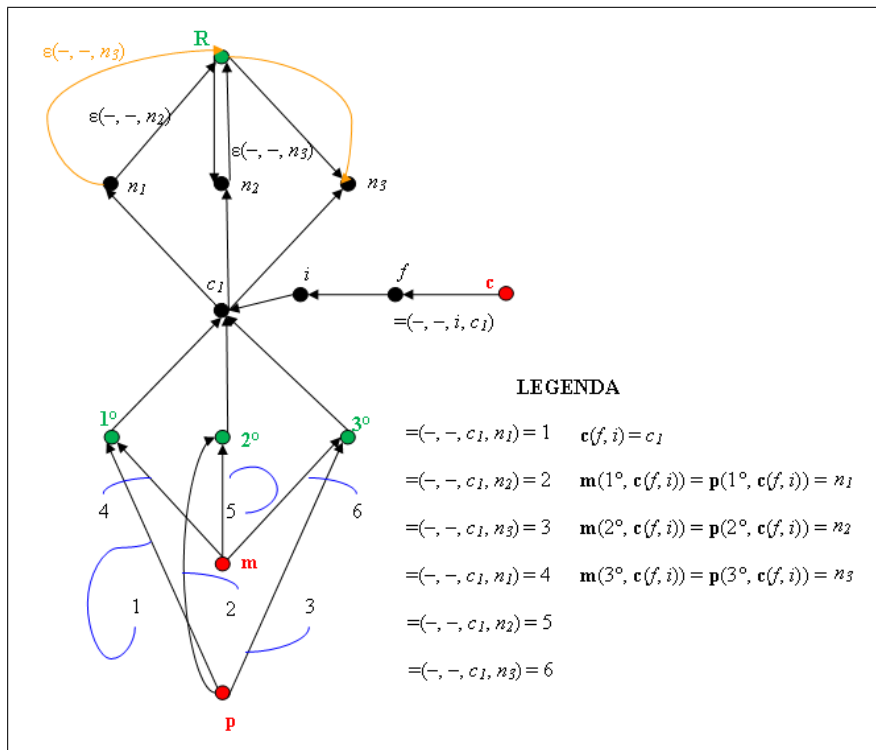


Figura 12: Il p -grafo di figura 11 dopo l'arricchimento prodotto dalla regola Lr1.

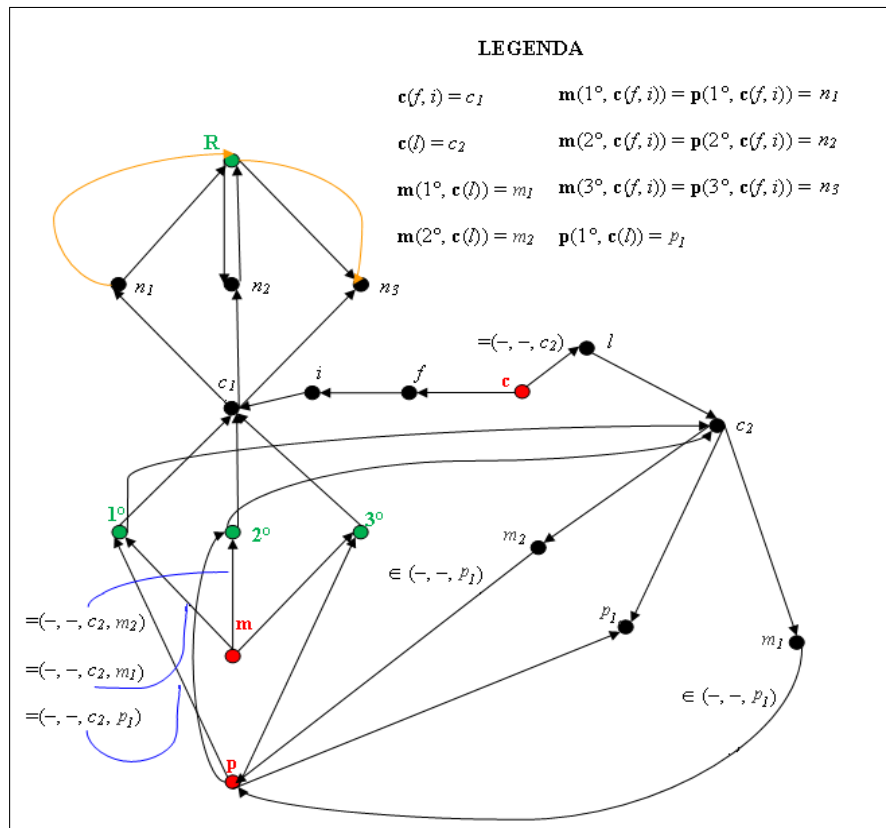


Figura 13: Il p -grafo di figura 12 arricchito dall'immissione dei nuovi fatti riguardanti il corso di logica. Per maggiore chiarezza sono state omesse tutte le etichette dei fatti già rappresentati nella figura 12.