

## DISCRETIZZAZIONE SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Camillo Rita

e-Mail: [linusfree@alice.it](mailto:linusfree@alice.it)

web: <http://www.webalice.it/linusfree>

Si prendono in considerazione le seguenti 4 funzioni

$U1(t) = \int_0^t I1(\tau) d\tau$	$U2(t) = \frac{dI2(t)}{dt}$
$U3(t) = \int_0^t e^{-\alpha*(t-\tau)} * I3(\tau) d\tau$	$U4(t) = \frac{dI3(t)}{dt} + \alpha * I3(t)$

La U1 e la U3 per t=0 sono nulle, ma se ciò non fosse significherebbe la presenza di una costante additiva al secondo membro; ma questa può essere portata in sottrazione al primo membro e inglobata nella definizione di U ritornando alle forme espresse.

Con tale premessa si può estendere l'estremo inferiore dell'integrale a qualunque valore negativo purché nell'intervallo fino a 0 I1 e I3 siano nulle. Questo consente di definire I1(0)=I3(0)=0 anche ammettendo una discontinuità in questo punto.

La U3 e la U4 possono ulteriormente elaborarsi moltiplicando ambo i membri per e<sup>α\*t</sup>:

$$e^{\alpha*t} * U3(t) = e^{\alpha*t} * \int_0^t e^{-\alpha*(t-\tau)} * I3(\tau) d\tau \quad e^{\alpha*t} * U4(t) = e^{\alpha*t} * \frac{dI3(t)}{dt} + \alpha * e^{\alpha*t} * I3(t)$$

$$e^{\alpha*t} * U3(t) = \int_0^t e^{\alpha*\tau} * I3(\tau) d\tau \quad e^{\alpha*t} * U4(t) = \frac{de^{\alpha*t} * I3(t)}{dt}$$

Se si pone:

$$U3' = e^{\alpha*t} * U3(t) \quad e \quad I3' = e^{\alpha*t} * I3(t) \quad U4' = e^{\alpha*t} * U4(t) \quad e \quad I4' = e^{\alpha*t} * I4(t)$$

Si ottiene:

$U'3(t) = \int_0^t I'3(\tau) d\tau$	$U'4(t) = \frac{dI'3(t)}{dt}$
-------------------------------------	-------------------------------

In definitiva si ottengono forme identiche a U1 e U2 alle quali si associano le trasformate di Laplace:

dominio di t	Dominio di s (trasf. Di Laplace)
$U1(t) = \int_0^t I1(\tau) d\tau$	$U1(s) = I1(s) * \frac{1}{s}$
$U2(t) = \frac{dI2(t)}{dt}$	$U2(s) = I2(s) * s$

Si discretizza l'asse dei tempi con un'ampiezza dt tale che t=n\*dt; quindi le U(t) diventano:

$$U1(n * dt) = \int_0^{n*dt} I1(\tau) d\tau \approx \int_0^{(n-1)*dt} I1(\tau) d\tau + [I1(n * dt) + I1((n - 1) * dt)] * \frac{dt}{2}$$

$$U1(n * dt) \approx U1((n - 1) * dt) + [I1(n * dt) + I1((n - 1) * dt)] * \frac{dt}{2}$$

Si è fatta in sostanza un'integrazione trapezoidale dell'ultimo intervallo dt.

$$\frac{U2(n * dt) + U2((n - 1) * dt)}{2} = \frac{I2(n * dt) - I2((n - 1) * dt)}{dt}$$

$$U2(n * dt) * \frac{dt}{2} = I2(n * dt) - \left[ U2((n - 1) * dt) * \frac{dt}{2} + I2((n - 1) * dt) \right]$$

Il valore medio di U2 ai due estremi (n-1)\*dt e n\*dt è uguale al rapporto incrementale di I2.  
Si pone:

$$U1(n * dt) = U1_n \quad \underline{U1}_n = U1_n * \frac{2}{dt} \quad I1(n * dt) = I1_n$$

$$U2(n * dt) = U2_n \quad \underline{U2}_n = U2_n * \frac{2}{dt} \quad I1(n * dt) = I1_n$$

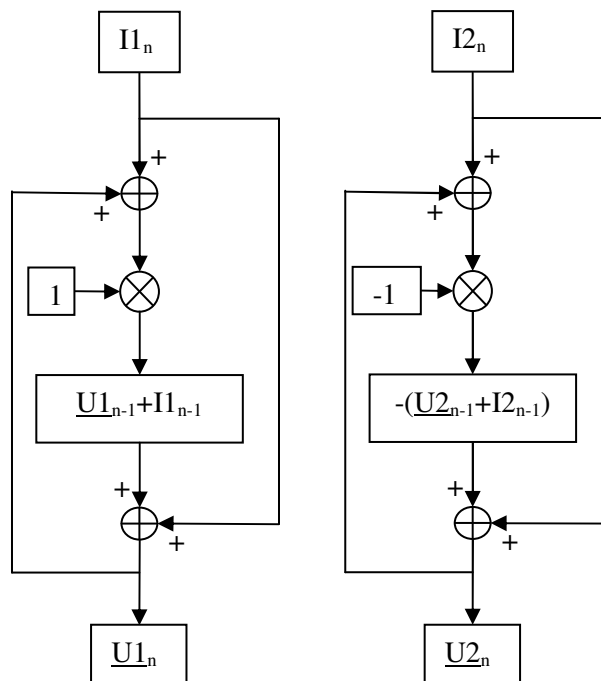
si ottiene:

$$U1_n * \frac{2}{dt} \approx U1_{n-1} * \frac{2}{dt} + [I1_n + I1_{n-1}] \quad \underline{U1}_n \approx +I1_n + (\underline{U1}_{n-1} + I1_{n-1})$$

$$U2_n * \frac{dt}{2} \approx I2_n - \left[ U2_{n-1} * \frac{dt}{2} + I2_{n-1} \right] \quad \underline{U2}_n \approx I2_n - (\underline{U2}_{n-1} + I2_{n-1})$$

$$\underline{U1}_n \approx I1_n + (\underline{U1}_{n-1} + I1_{n-1}) \quad \underline{U2}_n \approx I2_n - (\underline{U2}_{n-1} + I2_{n-1})$$

Le quali hanno le seguenti rappresentazioni grafiche:



Se al posto di U1 e U2 si pone U'3 e U'4:

$$\underline{U3}'_n \approx I3'_n + (\underline{U3}'_{n-1} + I3'_{n-1}) \quad \underline{U4}'_n \approx I4'_n - (\underline{U4}'_{n-1} + I4'_{n-1})$$

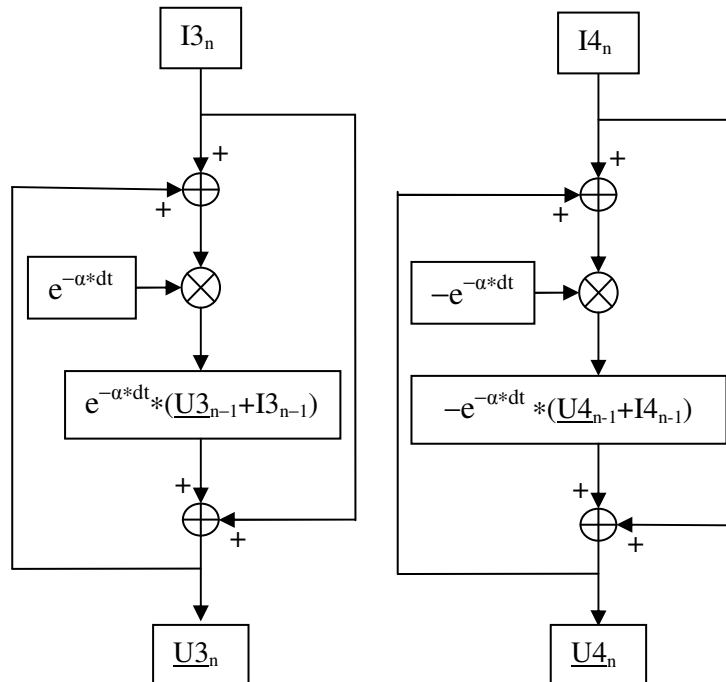
Inoltre:

$$U3' = e^{\alpha * t} * U3(t) \quad e \quad I3' = e^{\alpha * t} * I3(t) \quad U4' = e^{\alpha * t} * U4(t) \quad e \quad I4' = e^{\alpha * t} * I4(t)$$

$$\begin{aligned} e^{\alpha * n * dt} * \underline{U3}_n &\approx e^{\alpha * n * dt} * I3_n + e^{\alpha * (n-1) * dt} * (\underline{U3}_{n-1} + I3_{n-1}) \\ e^{\alpha * n * dt} * \underline{U4}_n &\approx e^{\alpha * n * dt} * I4_n - e^{\alpha * (n-1) * dt} * (\underline{U4}_{n-1} + I4_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\underline{U3}_n \approx I3_n + e^{-\alpha * dt} * (\underline{U3}_{n-1} + I3_{n-1}) \quad \underline{U4}_n \approx I4_n - e^{-\alpha * dt} * (\underline{U4}_{n-1} + I4_{n-1})$$

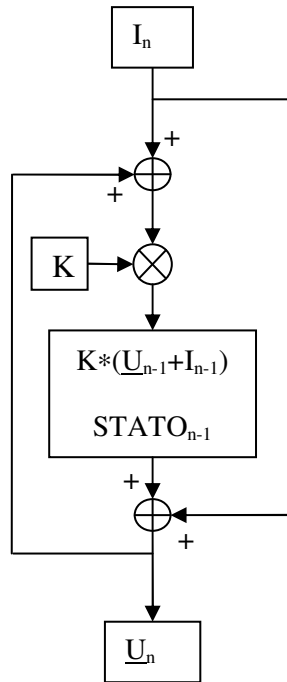
Le quali hanno le seguenti rappresentazioni grafiche:



Per  $\alpha=0$  si ottengono le forme U1 e U2

#### PROPRIETÀ DEGLI OPERATORI

I quattro casi esaminati possono individuarsi con un solo operatore dipendente da un parametro  $k \neq 0$  che ha la seguente rappresentazione grafica:



Che ha la seguente funzionalità:

- Lo STATO<sub>0</sub> iniziale è K\*(U<sub>0</sub>+I<sub>0</sub>) è nullo.
- L'uscita U<sub>n</sub> è ottenuta dalla somma dello STATO<sub>n-1</sub>+I<sub>n</sub>
- Si rinnova il valore dello STATO moltiplicando, il parametro K per la somma U<sub>n</sub>+I<sub>n</sub>:  
STATO<sub>n</sub>= K\*(U<sub>n</sub>+ I<sub>n</sub>)

$$\underline{U}_n = I_n + \text{STATO}_{n-1} \quad \text{STATO}_n = K * (\underline{U}_n + I_n)$$

Che può essere scritta in una sola formula accompagnata dal suo sviluppo a partire da U<sub>0</sub>+I<sub>0</sub> nulli:

$$\underline{U}_n = I_n + K * (\underline{U}_{n-1} + I_{n-1})$$

$$\underline{U}_1 = I_1 + K * (\underline{U}_0 + I_0)$$

$$\underline{U}_2 = I_2 + K * (\underline{U}_1 + I_1) = I_2 + 2 * K * I_1 + K^2 * I_0 + K^2 * \underline{U}_0$$

$$\underline{U}_3 = I_3 + K * (\underline{U}_2 + I_2) = I_3 + 2 * (K * I_2 + K^2 * I_1) + K^3 * (\underline{U}_0 + I_0)$$

$$\underline{U}_4 = I_4 + 2 * (K * I_3 + K^2 * I_2 + K^3 * I_1) + K^4 * (\underline{U}_0 + I_0) \text{ continuando:}$$

$$\underline{U}_n = I_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (K^{n-i} * I_i) + K^n * (I_0 + \underline{U}_0)$$

K≠0 consegue dalla sua definizione:  $K = \pm e^{\pm \alpha * dt}$  che per nessun valore di α è nulla. Però, la precedente relazione numerica ha senso per K=0 con {U<sub>n</sub>}={I<sub>n</sub>} quindi quest'ultima si accetta per definizione come la soluzione dell'operatore parametrico quando K=0; pertanto l'operazione introdotta vale con -1≤K≤1.

L'introduzione dello STATO permette allo step n di conservare dello step n-1 un solo valore, lo STATO<sub>n-1</sub> appunto, e non due come altrimenti necessario: U<sub>n-1</sub> e I<sub>n-1</sub>.

Lo schema di calcolo trovato può riassumersi nella seguente scrittura: {U<sub>n</sub>}=OP<sub>K</sub>[So;{I<sub>n</sub>}] se lo STATO iniziale So=0 si semplifica in {U<sub>n</sub>}=OP<sub>K</sub>[{I<sub>n</sub>}] dove le parentesi graffe sottintendono una successione. La condizione K≠0 può essere rimossa definendo: {U<sub>n</sub>}=OP<sub>0</sub>[{I<sub>n</sub>}]={I<sub>n</sub>}.

So=0 significa che un'eventuale U<sub>0</sub>≠0 è inglobata in diminuzione di U<sub>n</sub> e che I<sub>0</sub>=0.

Si definisce OP<sub>K1,K2</sub>[{I<sub>n</sub>}] = OP<sub>K1</sub>[OP<sub>K2</sub>[{I<sub>n</sub>}]] da cui ha senso OP<sub>K1,K2,...,Km</sub>[{I<sub>n</sub>}] equivalente al seguente schema:

$$\underline{U}_1 = I_1 + K_1 * (\underline{U}_{1-1} + I_{1-1})$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 + K_2 * (\underline{U}_{2-1} + \underline{U}_{1-1})$$

.....  
.....

$$\underline{U}_n = \underline{U}_{n-1} + K_m * (\underline{U}_{n-1} + I_{n-1})$$

Si può quindi definire un'algebra nel seguente modo:

sia  $\mathfrak{S}$  l'insieme di tutte le successioni  $\{I_n\}$  con  $I_0=0$  l'operazione  $OP_k[\{I_n\}]$  è chiusa in  $\mathfrak{S}$  e rispetta le seguenti proprietà:

- $K=0$  trasforma  $\{I_n\}$  in se stessa (definizione)
- $OP_k[\{I_1\} + \{I_2\}] = OP_k[\{I_1\}] + OP_k[\{I_2\}]$  se  $U_0 = U_{10} + U_{20}$

Infatti:

$$OP_k[\{I_1\} + \{I_2\}] = \underline{U}_n \quad OP_k[\{I_1\}] = \underline{U}_{1n} \quad OP_k[\{I_2\}] = \underline{U}_{2n}$$

Occorre dimostrare che  $\underline{U}_n = \underline{U}_{1n} + \underline{U}_{2n} \quad \forall n$

Il primo membro è

$$\underline{U}_n = OP_k[\{I_1\} + \{I_2\}] = (I_{1n} + I_{2n}) + K * [\underline{U}_{n-1} + (I_{1n-1} + I_{2n-1})]$$

Il secondo membro è la somma dei seguenti due addendi:

$$OP_k[\{I_1\}] = \underline{U}_{1n} = I_{1n} + K * (\underline{U}_{1n-1} + I_{1n-1})$$

$$OP_k[\{I_2\}] = \underline{U}_{2n} = I_{2n} + K * (\underline{U}_{2n-1} + I_{2n-1})$$

\_\_\_\_\_ sommando

$$\underline{U}_{1n} + \underline{U}_{2n} = I_{1n} + I_{2n} + K * (\underline{U}_{1n-1} + I_{1n-1}) + K * (\underline{U}_{2n-1} + I_{2n-1})$$

$$\underline{U}_{1n} + \underline{U}_{2n} = (I_{1n} + I_{2n}) + K * [(\underline{U}_{1n-1} + \underline{U}_{2n-1}) + (I_{1n-1} + I_{2n-1})]$$

Sottraendo il primo membro dal secondo:

$$\underline{U}_n = (I_{1n} + I_{2n}) + K * [\underline{U}_{n-1} + (I_{1n-1} + I_{2n-1})]$$

$$\underline{U}_{1n} + \underline{U}_{2n} = (I_{1n} + I_{2n}) + K * [(\underline{U}_{1n-1} + \underline{U}_{2n-1}) + (I_{1n-1} + I_{2n-1})]$$

\_\_\_\_\_ sottraendo

$$\underline{U}_n - (\underline{U}_{1n} + \underline{U}_{2n}) = K * [\underline{U}_{n-1} - (\underline{U}_{1n-1} + \underline{U}_{2n-1})]$$

Se  $K=0$  allora  $\underline{U}_n - (\underline{U}_{1n} + \underline{U}_{2n}) = 0 \quad \underline{U}_n = \underline{U}_{1n} + \underline{U}_{2n}$  Tesi

Se  $K \neq 0$  per  $n=0$   $U_0 = U_{10} + U_{20}$  è vera per ipotesi, si suppone che essa sia vera per  $n_0 \neq 0$ ;

$\underline{U}_{n_0} = (\underline{U}_{1n_0} + \underline{U}_{2n_0})$  allora:

$$\underline{U}_{n_0+1} = (I_{1n_0+1} + I_{2n_0+1}) + K * [\underline{U}_{n_0} + (I_{1n_0} + I_{2n_0})]$$

$$\underline{U}_{n_0+1} = (I_{1n_0+1} + I_{2n_0+1}) + K * (\underline{U}_{1n_0} + \underline{U}_{2n_0} + I_{1n_0} + I_{2n_0}) = I_{1n_0+1} + K * (\underline{U}_{1n_0} + I_{1n_0}) + I_{2n_0+1} + K * (\underline{U}_{2n_0} + I_{2n_0}) = \underline{U}_{1n_0+1} + \underline{U}_{2n_0+1}$$

in sintesi  $\underline{U}_{n_0+1} = \underline{U}_{1n_0+1} + \underline{U}_{2n_0+1}$

in definitiva se  $U_0 = U_{10} + U_{20}$  e ammessa vera  $\underline{U}_{n_0} = (\underline{U}_{1n_0} + \underline{U}_{2n_0})$  allora  $\underline{U}_{n_0+1} = \underline{U}_{1n_0+1} + \underline{U}_{2n_0+1}$

per il teorema dell'induzione completa  $\underline{U}_n = (\underline{U}_{1n} + \underline{U}_{2n})$  è vera per  $\forall n$ .

- $OP_k[\{a * I_n\}] = a * OP_k[\{I_n\}]$  se  $\underline{U}_0 = a * \underline{U}'_0$  dove  $\underline{U}_n = OP_k[\{a * I_n\}]$  e  $\underline{U}'_n = OP_k[\{I_n\}]$

infatti:

se  $n=0$   $\underline{U}_0 = a * \underline{U}'_0$  per ipotesi.

Si suppone vera  $\underline{U}_{n_0} = a * \underline{U}'_{n_0}$  per un  $n_0 \neq 0$ :

$$\underline{U}_{n_0+1} = OP_k[\{a * I_{n_0+1}\}] = a * I_{n_0+1} + K * (\underline{U}_{n_0} + a * I_{n_0}) = a * I_{n_0+1} + K * (a * \underline{U}'_{n_0} + a * I_{n_0}) =$$

$$= a * [I_{n_0+1} + K * (\underline{U}'_{n_0} + I_{n_0})] = a * OP_k[\{I_{n_0+1}\}] \quad \text{in definitiva:}$$

$$OP_k[\{a * I_{n_0+1}\}] = a * OP_k[\{I_{n_0+1}\}]$$

Quindi  $OP_k[\{a * I_n\}] = a * OP_k[\{I_n\}]$  è vera se  $n=0$ , se supposta vera per un  $n_0 \neq 0$  allora è vera anche per  $n_0+1$  per il teorema dell'induzione completa è vera per  $\forall n$ .

Le proprietà b) e c) combinate affermano che OP è un'operazione lineare.

- $OP_{A,B}[\{I_n\}] = OP_{B,A}[\{I_n\}]$  se per entrambi i membri  $I_0 + U_0$  è nullo sia per l'operazione A che per B che per le loro due combinazioni.

Posto:  $\underline{UAB}_n = OP_{A,B}[\{I_n\}]$  e  $\underline{UB}_n = OP_B[\{I_n\}]$

$$\begin{cases} \underline{U}_A = I_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (A^{n-i} * I_i) \\ \underline{U}_B = I_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (B^{n-i} * I_i) \\ \underline{U}_{AB} = \underline{U}_B + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (A^{n-i} * \underline{U}_{B_i}) \\ \underline{U}_{BA} = \underline{U}_A + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (B^{n-i} * \underline{U}_{A_i}) \end{cases}$$

Per n=1:  $\underline{U}_B = \underline{U}_A = \underline{U}_{AB} = \underline{U}_{BA} = I_1$

Per n=2:  $\underline{U}_B = I_2 + 2 * B * I_1$      $\underline{U}_A = I_2 + 2 * A * I_1$

$$\begin{cases} \underline{U}_{AB} = \underline{U}_B + 2 * A * \underline{U}_{B_1} = I_2 + 2 * (B + A) * I_1 \\ \underline{U}_{BA} = \underline{U}_A + 2 * B * \underline{U}_{A_1} = I_2 + 2 * (A + B) * I_1 \end{cases} \Rightarrow \underline{U}_{AB} = \underline{U}_{BA}$$

Per n>2

$$\begin{cases} \underline{U}_{AB} = \left( I_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (B^{n-i} * I_i) \right) + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} \left( A^{n-i} * \left( I_i + 2 * \sum_{j=1}^{i-1} (B^{i-j} * I_j) \right) \right) \\ \underline{U}_{BA} = \left( I_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (A^{n-i} * I_i) \right) + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} \left( B^{n-i} * \left( I_i + 2 * \sum_{j=1}^{i-1} (A^{i-j} * I_j) \right) \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{U}_{AB} = I_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (B^{n-i} + A^{n-i}) * I_i + 4 * \sum_{i=1}^{n-1} A^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} B^{i-j} * I_j \\ \underline{U}_{BA} = I_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} (A^{n-i} + B^{n-i}) * I_i + 4 * \sum_{i=1}^{n-1} B^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} A^{i-j} * I_j \end{cases}$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{BA} \text{ se } \sum_{i=1}^{n-1} A^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} B^{i-j} * I_j = \sum_{i=1}^{n-1} B^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} A^{i-j} * I_j$$

Ma ciò è vero perché lo sviluppo delle sommatorie così ordinate:

	$\sum_{i=1}^{n-1} A^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} B^{i-j} * I_j$	$\sum_{i=1}^{n-1} B^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} A^{i-j} * I_j$
	n-1	n-1
i=1	$A^{n-1} * 0+$	$B^{n-1} * 0+$
i=2	$+A^{n-2} * B * I_1+$	$+B^{n-2} * A * I_1+$
i=3	$+A^{n-3} * (B^2 * I_1 + B * I_2)+$	$+B^{n-3} * (A^2 * I_1 + A * I_2)+$
i=4	$+A^{n-4} * (B^3 * I_1 + B^2 * I_2 + B * I_3)+$	$+B^{n-4} * (A^3 * I_1 + A^2 * I_2 + A * I_3)+$
	+.....+	+.....+
i=n-1	$+A * (B^{n-2} * I_1 + B^{n-3} * I_2 + \dots + B * I_{n-2})$	$+B * (A^{n-2} * I_1 + A^{n-3} * I_2 + \dots + A * I_{n-2})$

mostrano che esse sono combinazioni lineari di  $I_k$  i cui coefficienti relativi ai due membri dell'eguaglianza in questione sono così composti:

$$\sum_{i=1}^{n-1} A^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} B^{i-j} * I_j \Rightarrow (B^{n-k-1} * A + B^{n-k-2} * A^2 + \dots + B^2 * A^{n-k-2} + B * A^{n-k-1}) * I_k$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} B^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} A^{i-j} * I_j \Rightarrow (A^{n-k-1} * B + A^{n-k-2} * B^2 + \dots + A^2 * B^{n-k-2} + A * B^{n-k-1}) * I_k$$

Le due somme, componenti i coefficienti di  $I_k$ , sono identiche in quanto gli addendi dell'una sono soltanto scritti in ordine inverso a quelli dell'altra.

Quindi:

$$\sum_{i=1}^{n-1} A^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} B^{i-j} * I_j = \sum_{i=1}^{n-1} B^{n-i} * \sum_{j=1}^{i-1} A^{i-j} * I_j \text{ e in conseguenza } \underline{U_{AB}}_n = \underline{U_{BA}}_n$$

TESI

e) Se  $OP_A[\{I_n\}]$  allora esiste  $OP_{-A}[\{I_n\}]$  tale che:

$$OP_{A,-A}[\{I_n\}] = OP_{-A,A}[\{I_n\}] = OP_{-A}[OP_A[\{I_n\}]] = OP_A[OP_{-A}[\{I_n\}]] = \{I_n\} = OP_0[\{I_n\}]$$

La proposizione d) giustifica le eguaglianze scritte eccetto l'ultima; pertanto resta da dimostrare:

$$OP_{A,-A}[\{I_n\}] = \{I_n\}$$

Una generica operazione  $\{\underline{UB}_n\} = OP_B[\{I_n\}]$  può scriversi nel seguente modo:

$$\underline{UB}_n = I_n + B * (\underline{UB}_{n-1} + I_{n-1})$$

Se a  $\{\underline{UB}_n\}$  si applica  $\{\underline{UAB}_n\} = OP_A[\{\underline{UB}_n\}]$  si ottiene:

$\underline{UAB}_n = \underline{UB}_n + A * (\underline{UAB}_{n-1} + \underline{UB}_{n-1})$  si sostituisce in essa soltanto il termine  $\underline{UB}_n$ :

$$\underline{UAB}_n = I_n + B * (\underline{UB}_{n-1} + I_{n-1}) + A * (\underline{UAB}_{n-1} + \underline{UB}_{n-1}) = I_n + (B+A) * \underline{UB}_{n-1} + B * I_{n-1} + A * \underline{UAB}_{n-1}$$

Per transitività  $\underline{UAB}_n = I_n + (B+A) * \underline{UB}_{n-1} + B * I_{n-1} + A * \underline{UAB}_{n-1}$

$$\text{Se } B = -A \quad \underline{UA-A}_n = I_n - A * I_{n-1} + A * \underline{UA-A}_{n-1}$$

$$\text{Per } n=1 \quad \underline{UA-A}_0 = I_0 = 0 \quad \underline{UA-A}_1 = I_1$$

Se si suppone, per  $n-1 > 1$ , che:  $\underline{UA-A}_{n-1} = I_{n-1}$

allora  $\underline{UA-A}_n = I_n - A * I_{n-1} + A * \underline{UA-A}_{n-1} = I_n - A * I_{n-1} + A * I_{n-1} = I_n$  per transitività  $\underline{UA-A}_n = I_n$

per il teorema dell'induzione completa:

$$\underline{UA-A}_n = I_n \quad \forall n$$

APPLICAZIONE

### CINETICA NEUTRONICA IN UN REATTORE A FISSIONE MODELLO PUNTIFORME

Il modello della cinetica neutronica puntiforme è diretta conseguenza del fattore di moltiplicazione effettiva  $K_e$ .

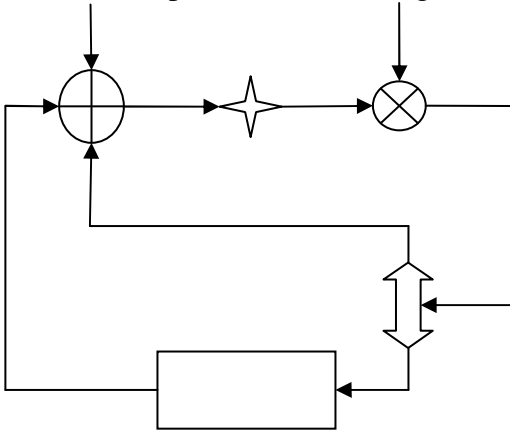
I neutroni, 2Mev emessi dalla fissione, nel nocciolo subiscono un processo di termalizzazione, di diffusione, di assorbimento infruttuoso e di fughe dal sistema al termine del quale, la parte residua produce fissioni dalle quali si ricavano nuovi neutroni a 2Mev.

Partendo da una generazione di  $n$  neutroni alla successiva se ne avranno:  $K_e * n$ .

Di questi una frazione  $\beta$  non è immediatamente disponibile ma viene rilasciata dal decadimento dei prodotti di fissione classificabili in 7 gruppi ognuno dei quali rilascia, con una costante di decadimento  $\tau_i$ , una frazione  $\beta_i$ .

$$\sum_{i=1}^7 \beta_i = \beta$$

Ammissa la presenza di una sorgente neutronica; lo schema di calcolo è il seguente:



Il sistema preso in considerazione è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(t) = \frac{Ke * (1 - \beta) - 1}{l} * n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i * C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) = \beta_i * \frac{Ke}{l} * n(t) - \lambda_i * C_i(t) \end{cases}$$