BREVI RICHIAMI TECNICI

Camillo Rita
e-Mail: linusfree@alice.it
web: http://www.webalice.it/linusfree

Prima di affrontare la deduzione analitica delle precedenti FORMULE di INTERPOLAZIONE è bene richiamare alcune tecniche del calcolo precisando in esse le simbologie adottate.

NUMERI COMPLESSI

Un numero complesso, $Z = x + i * y$, più propriamente è rappresentato dalla seguente particolare matrice (2x2): $Z = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}$ dove x e y reali sono detti rispettivamente parte reale e parte immaginaria di z. La scrittura di Z, per sinteticità, può essere ridotta alle seguenti:

$$Z = (x, y) \quad oppure \quad Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Il modulo, $|Z|$, di Z è la radice positiva del suo determinante $|Z| = \sqrt{\|Z\|} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le operazioni di somma e prodotto di due o più numeri complessi corrispondono alle omonime definite per le matrici. Il coniugato di un numero complesso è la sua trasposta.

TRIGONOMETRIA PLANARE

Premesse le definizioni di sin(α) e cos(α), per brevità si scrive: c(α) per cos(α) e s(α) per sin(α), comunque α reale, vale la formula di normalizzazione: $c(\alpha)^2+s(\alpha)^2=1$

La coppia di valori c(α) e s(α) rappresentano le componenti di un versore (modulo 1) inclinato α rispetto "all'ascissa" del piano cartesiano.

Considerata implicita la variabile α, al versore richiamato si associa come equivalente la matrice:

$$z = \begin{vmatrix} c & -s \\ s & c \end{vmatrix} = (c, s) = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}$$

che rappresenta il numero complesso normalizzato z (modulo e determinante sono uguali a 1) dove "c" è la parte reale e "s" è la parte immaginaria.

Si dice che z è il numero complesso associato al versore di componenti (c,s) con $c^2+s^2=1$.

L'inversa di z, si scrive «z» o z^{-1}, coincide sia con il coniugato di z (cambiamento del segno alla parte complessa) sia con la trasposta, z^T, di z; poiché «z» $= z^T$, z è una matrice ortogonale, inoltre essendo anche normalizzata ($c^2+s^2=1$) si dice che è ortonormale.

Valgono le relazioni: z(−α)=«z(α)» z(0)=E

E' bene ricordare che il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso la cui trasposta (inversa o coniugata) è tale che:

«(Z1∗Z2)»=«Z2»∗«Z1»=«Z1»∗«Z2» (i numeri complessi Z sono matrici commutative)

L'uso dei numeri complessi nella rappresentazione cartesiana dei vettori del piano è principalmente dovuto alla coincidenza in due dimensioni di essere numeri sia ortogonali che commutativi.

FORMULE DI ADDIZIONE e SOTTRAZIONE

$$\begin{vmatrix} c(\alpha \pm \beta) & -s(\alpha \pm \beta) \\ s(\alpha \pm \beta) & c(\alpha \pm \beta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c(\alpha) & -s(\alpha) \\ s(\alpha) & c(\alpha) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} c(\beta) & -s(\pm\beta) \\ s(\pm\beta) & c(\beta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c(\alpha) & -s(\alpha) \\ s(\alpha) & c(\alpha) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} c(\beta) & \mp s(\beta) \\ \pm s(\beta) & c(\beta) \end{vmatrix}$$

z(α+β)=z(α)∗z(β) (definizione di esponenziale, trasforma somme in prodotti)

z(α−β)=z(α)∗«z(β)» da cui le formule inverse:

z(α)=z(α+β)∗«z(β)» z(α)=z(α−β)∗z(β)

z(β)=«z(α)»∗z(α+β) «z(β)»=«z(α)»∗z(α−β)

Formule particolari:

se α=π z(π+β)=z(π)∗z(β)=−z(β) z(π−β)=z(π)∗«z(β)»=−«z(β)»=−z(−β) «z(β)»=z(−β)

FORMULA DI DUPLICAZIONE

Nella FORMULA DI ADDIZIONE se $\alpha=\beta$: $z(2*\alpha)=z(\alpha)*z(\alpha)=z^2(\alpha)$

FORMULA DI BISEZIONE
Nella FORMULA DI DUPLICAZIONE se $2*\alpha=\beta$: $z(\beta)=z^2(\beta/2)$ si moltiplica a sinistra per «$Z(\beta/2)$»:

«$z(\beta/2)$»$*z(\beta)=E*z(\beta/2)=z(\beta/2)$ per uniformità con α al posto di β:
$z(\alpha)=z^2(\alpha/2)$ $z(\alpha/2)=$«$z(\alpha/2)$»$*z(\alpha)=z(\alpha)*$«$z(\alpha/2)$»

RIASSUMENDO
$c(\alpha)=\cos(\alpha)$ $s(\alpha)=\sin(\alpha)$ $c^2(\alpha)+s^2(\alpha)=1$
$z(-\alpha)=$«$z(\alpha)$» (l'inversa di z coincide con la coniugata e con la trasposta)

SOMMA-SOTTRAZIONE $z(\alpha+\beta)=Z(\alpha)*z(\beta)$ $z(\alpha-\beta)=z(\alpha)*$«$z(\beta)$»
$z(\pi+\beta)=-z(\beta)$ $z(\pi-\beta)=-$«$z(\beta)$»$=-z(-\beta)$ «$z(\beta)$»$=z(-\beta)$
RELAZIONI-INVERSE $z(\alpha)=z(\alpha+\beta)*$«$z(\beta)$» $z(\alpha)=z(\alpha-\beta)*$«$z(\beta)$»
DUPLICAZIONE $z^2(\alpha)=z(2*\alpha)$
BISEZIONE $z(\alpha)=z^2(\alpha/2)$

BISEZIONE–T(Triangolare)
Sia $z(\alpha)$ il numero complesso associato al versore inclinato α, dove $0<\alpha<\pi$, rispetto all'ascissa e sia E la matrice unitaria a due dimensioni corrispondente al numero complesso associato al versore dell'ascissa, allora: la somma dei due precedenti versori sarà un vettore (modulo non unitario) $R(\alpha/2)$ inclinato $\alpha/2$, con $0<\alpha/2<\pi/2$, rispetto all'ascisse e vale: $R(\alpha/2)=Z(\alpha)+E$ il cui versore $r(\alpha/2)$ risulta essere:

$$r(\alpha/2)=(z(\alpha)+E)\Big/\sqrt{\|z(\alpha)+E\|}$$

A un punto P generico del piano XY, individuato dalla coppia di reali (x,y), si associa il numero complesso non normalizzato:

$$R(x,y)=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}$$ che rappresenta il vettore O_P dove O è l'origine degli assi.

SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE SECONDO DUE DIREZIONI
Siano ra e rb due rette di un piano cartesiano, per esempio il piano XY individuato rispettivamente dai versori va e vb delle rette, e sia R(x,y) un vettore dello stesso piano; si vogliono individuare i vettori componenti di R(x,y) nelle direzioni ra e rb.
La relazione delle componenti è:

$$R(x,y)=Ka*va+Kb*vb=R_a(x_a,y_a)+R_b(x_b,y_b)$$

dove Ka e Kb sono parametri reali da individuare; in forma matriciale la relazione delle componenti diventa:

$$\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=Ka*\begin{vmatrix} ca & -sa \\ sa & ca \end{vmatrix}+Kb*\begin{vmatrix} cb & -sb \\ sb & cb \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} Ka*ca+Kb*cb & -(Ka*sa+Kb*sb) \\ Ka*sa+Kb*sb & Ka*ca+Kb*cb \end{vmatrix}$$

da cui Ka e Kb sono conseguenza del sistema:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} Ka*ca+Kb*cb \\ Ka*sa+Kb*sb \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ca & cb \\ sa & sb \end{vmatrix}*\begin{vmatrix} Ka \\ Kb \end{vmatrix}$$

se $\left\|\begin{matrix} ca & cb \\ sa & sb \end{matrix}\right\| \neq 0$ (i versori va e vb non sono paralleli) allora esiste l'inversa:

$$\begin{vmatrix} ca & cb \\ sa & sb \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} sb & -cb \\ -sa & ca \end{vmatrix} \Big/ (ca * sb - cb * sa)$$

quindi:

$$\begin{vmatrix} Ka \\ Kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ca & cb \\ sa & sb \end{vmatrix}^{-1} * \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sb & -cb \\ -sa & ca \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \Big/ (ca * sb - cb * sa)$$

per quanto riguarda le componenti: $R(x,y)=Ka*va+Kb*vb=R_a(x_a,y_a)+R_b(x_b,y_b)$

$$R_a(x_a, y_a) = \begin{vmatrix} x_a & -y_a \\ y_a & x_a \end{vmatrix} = Ka*va = \frac{sb * x - cb * y}{(ca * sb - cb * sa)} * \begin{vmatrix} ca & -sa \\ sa & ca \end{vmatrix}$$

$$R_b(x_b, y_b) = \begin{vmatrix} x_b & -y_b \\ y_b & x_b \end{vmatrix} = Kb*vb = \frac{-sa * x + ca * y}{(ca * sb - cb * sa)} * \begin{vmatrix} cb & -sb \\ sb & cb \end{vmatrix}$$

RIASSUMENDO

$$x_a = Ka*va = \frac{sb * x - cb * y}{(ca * sb - cb * sa)} * ca$$

$$y_a = Ka*va = \frac{sb * x - cb * y}{(ca * sb - cb * sa)} * sa$$

$$x_b = Kb*vb = \frac{ca * y - sa * x}{(ca * sb - cb * sa)} * cb$$

$$y_b = Kb*vb = \frac{ca * y - sa * x}{(ca * sb - cb * sa)} * sb$$

OSSERVAZIONE UTILE

Sia α un angolo su un piano dello spazio, la proiezione della bisettrice di α su un altro piano non è bisettrice della proiezione di α.

Per convincersi della questione basta immaginare un angolo retto e la sua bisettrice complanari con un piano; se si fa ruotare rigidamente tale geometria intorno a un suo lato, all'avvicinarsi alla perpendicolarità al piano di partenza, la proiezione dell'angolo resta invariata (π/2), mentre la proiezione della bisettrice si appresta a sovrapporsi al lato scelto come asse di rotazione.

Tale osservazione suggerisce che: il percorso corretto per risolvere il calcolo dell'interpolazione è quello di trasformare le coordinate dei tre punti P0,P1,P2 da x,y,z a quelle di un riferimento cartesiano XY preso sul piano che passa per essi, calcolare poi su XY S,D,s e d e quindi riportare le coordinate di S,D,s e d da XY a x,y,z.

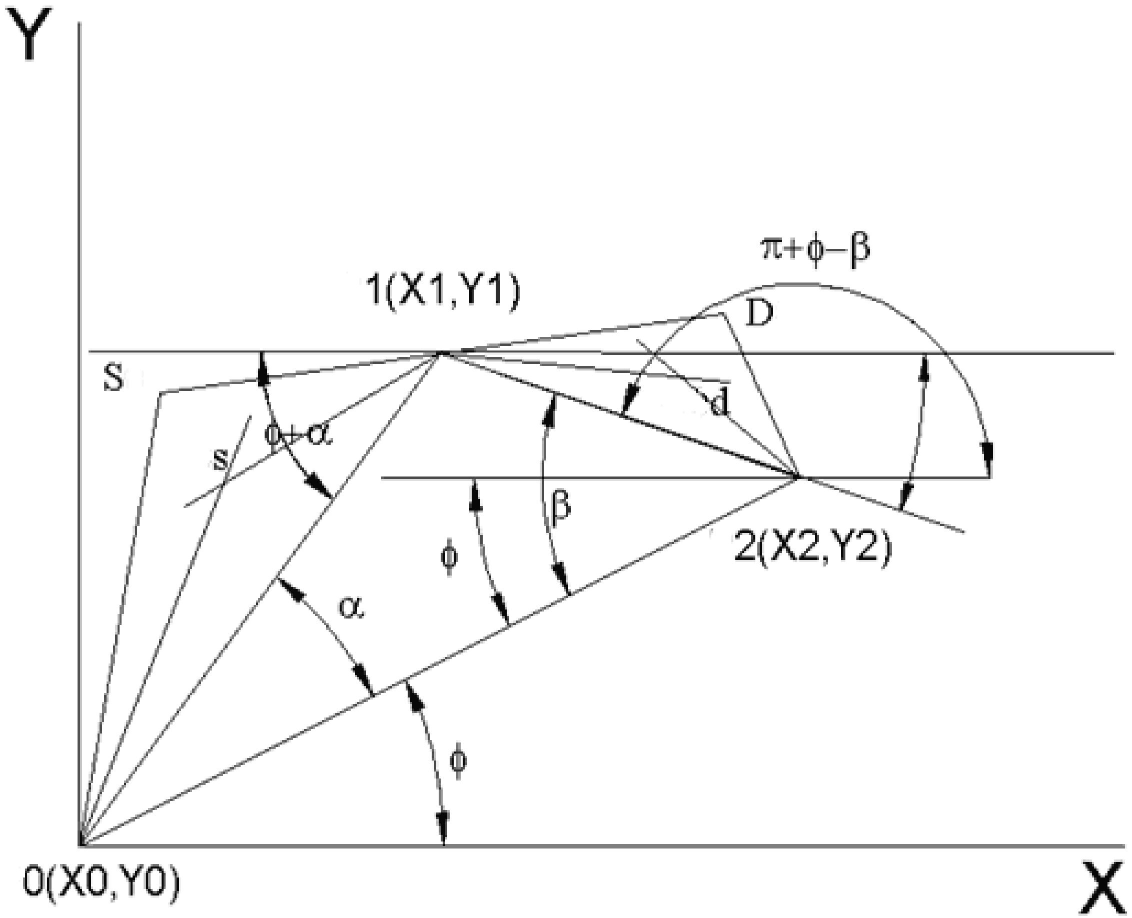
SOLUZIONE ANALITICA AL PROBLEMA DELL'INTERPOLAZIONE

Per rendere più facile il discorso i punti hanno una rappresentazione relativa coerente con la loro numerazione.

A differenza della rappresentazione assoluta, dove ogni punto è definito nel riferimento dalla sua terna cartesiana, in questo caso ogni punto è individuato dal vettore posizione (nelle tre componenti) che lo discosta dal precedente nell'ordine della numerazione assunta.

Si hanno quindi i tre punti P0,P1,P2 di SC e si considerano, in via preliminare, le loro coordinate su un riferimento XY con origine in P0 e giacente sul piano passante per essi.

(le rotazioni angolari positive sono quelle antiorarie)



I versori noti, individuati dall'angolo che formano con l'asse X sono:

$$v(0{,}1) = v(\emptyset + \alpha) = \begin{vmatrix} X01 & -Y01 \\ Y01 & X01 \end{vmatrix} \Big/ \begin{Vmatrix} X01 & -Y01 \\ Y01 & X01 \end{Vmatrix}^{1/2}$$

$$v(2{,}1) = v(\pi + \emptyset - \beta) = \begin{vmatrix} X21 & -Y21 \\ Y21 & X01 \end{vmatrix} \Big/ \begin{Vmatrix} X21 & -Y21 \\ Y21 & X21 \end{Vmatrix}^{1/2}$$

$$v(1{,}2) = -v(2{,}1)$$

$$v(0{,}2) = v(\emptyset) = \begin{vmatrix} X02 & -Y02 \\ Y02 & X02 \end{vmatrix} \Big/ \begin{Vmatrix} X02 & -Y02 \\ Y02 & X02 \end{Vmatrix}^{1/2}$$

$X02 = X01 + X12$ $\qquad\qquad$ $Y02 = Y01 + Y12$

In particolare si può notare che:

-per conoscere S è necessario ottenere la scomposizione del vettore V01=(X01,Y01) nelle direzioni dei versori:

$$v(0,S) = v(\emptyset + 2 * \alpha) \qquad e \qquad v(S,1) = -v(\pi + \emptyset + \alpha - \beta) = -v(1,S)$$

-per conoscere D è necessario trovare la scomposizione del vettore V12=(X12,Y12) nelle direzioni dei versori:

$$v(1,D) = v(\emptyset - \beta + \alpha) = -v(\pi + \emptyset + \alpha - \beta) \qquad e \qquad v(D,2) = -v(\pi + \emptyset - 2 * \beta)$$

Subito risulta $v(S,1) = v(1,D)$

-per conoscere s è necessario trovare la scomposizione del vettore V01=(X01,Y01) nelle direzioni dei versori:

$$v(0,\mathrm{s}) = v\left(\emptyset + \alpha + {}^{\alpha}/_{2}\right) \qquad e \qquad v(\mathrm{s},1) = -v\left(\pi + \emptyset + \alpha - {}^{\beta}/_{2}\right) = -v(1,s)$$

-per conoscere d è necessario trovare la scomposizione del vettore V12=(X12,Y12) nelle direzioni dei versori:

$$v(1,\mathrm{d}) = -v\left(\pi + \emptyset - \beta + {}^{\alpha}/_{2}\right) \qquad e \qquad v(\mathrm{d},2) = -v\left(\pi + \emptyset - \beta - {}^{\beta}/_{2}\right)$$

La correttezza degli angoli dei versori v consegue dalle seguenti costatazioni:

1. l'inclinazione di $v(0,S)$ rispetto all'asse X si ottiene sommando a $\emptyset$, che è l'inclinazione di $\overline{P0,P2}$ rispetto a X, una prima volta α, che è l'inclinazione $\overline{P0,P1}$ *rispetto* $\overline{P0,P2}$, e poi ancora α, che è anche inclinazione di $\overline{P0,S}$ *rispetto* $\overline{P0,P1}$.

2. l'inclinazione di $v(0,\mathrm{s})$ segue l'itinerario fatto per $v(0,S)$ con l'eccezione dell'ultimo passo dove α è sostituito da α/2.

3. l'inclinazione di $v(S,1)$ rispetto all'asse X, se cambiata di segno, corrisponde a quella di $\overline{P1,S}$ la quale si ottiene sommando a π, che permette di passare dalla semiretta destra della retta orizzontale passante per P1 a quella sinistra, $\emptyset + \alpha$ per raggiungere la direzione $\overline{P1,P0}$, e quindi sottrarre β del triangolo Δ(P0,P1,S), simile a Δ(P0,P2,P1), per raggiungere l'inclinazione $\overline{P1,S}$.

4. l'inclinazione di $v(\mathrm{s},1)$ segue l'itinerario fatto per $v(S01)$ con l'eccezione nell'ultimo passo dove il decremento di β è sostituito dal decremento di β/2.

5. l'inclinazione di $v(1,D)$ rispetto all'asse X, se si osserva che $\emptyset - \beta$ è l'angolo che $\overline{P1,P2}$ forma con X, si ottiene se a $\emptyset - \beta$ si aggiunge α del triangolo Δ(P2,P1,D), simile al Δ(P2,P0,P1), che porta il segmento $\overline{P1,P2}$ fino all'inclinazione di $\overline{P1,D}$.

6. l'inclinazione di $v(1,\mathrm{d})$ segue l'itinerario fatto per $v(1,D)$ con l'eccezione nell'ultimo passo dove α è sostituito da α/2.

7. l'inclinazione di $v(D,2)$ rispetto all'asse X se cambiata di segno corrisponde a quella di $v(2,D)$ la quale la è ottenuta partendo dalla semiretta destra per P2 equipollente e equiversa a X, ruotata prima di π per sovrapporla alla semiretta sinistra e quindi ancora di $\emptyset$ per sovrapporla alla semiretta che da P2 passa per P0 e poi ancora una volta di $-\beta$ per portarla sul lato $\overline{P2,P1}$ e infine una ulteriore volta di $-\beta$ per farla giungere alla direzione di $v(2,D)$.

8. l'inclinazione di $v(\mathrm{d},2)$ segue l'itinerario fatto per $v(D,2)$ con l'eccezione nell'ultimo passo dove β è sostituito da β/2.

Si applicano ai versori individuati le formule di addizione e sottrazione:

$$v(0,S) = v(\emptyset + 2 * \alpha) = \quad \dots \quad v(S,1) = -v(\pi + \emptyset + \alpha - \beta) =$$
$$= v(\emptyset) * v(\alpha)^2 = \quad e \quad = v(\alpha) * v(\emptyset - \beta) =$$
$$= v(0,2) * v(\alpha)^2 \quad \dots \quad = v(\alpha) * v(1,2)$$

Ma $\quad v(\alpha) = v(0,1) * v(-\emptyset) = v(0,1) * «v(\emptyset)» = v(0,1) * «v(0,2)»$

$$v(0,S) = v(0,2) * [v(0,1) * «v(0,2)»]^2 \quad e \quad v(S,1) = v(0,1) * «v(0,2)» * v(1,2)$$
$$v(0,S) = v(0,1)^2 * «v(0,2)» \quad e \quad v(S,1) = v(0,1) * v(1,2) * «v(0,2)» = v(1,D)$$

$$v(D,2) = -v(\pi + \emptyset - 2 * \beta) = v(\emptyset - 2 * \beta) = v(\emptyset) * v(-\beta)^2 = «v(\emptyset)» * v(\emptyset - \beta)^2$$
$$v(D,2) = «v(0,2)» * v(1,2)^2$$

alle formule di addizione e sottrazione si aggiunge quella della BISEZIONE–T

$$v(0,\mathrm{s}) = v\left(\emptyset + \alpha + {}^{\alpha}/_{2}\right) \quad e \quad v(\mathrm{s},1) = -v\left(\pi + \emptyset + \alpha - {}^{\beta}/_{2}\right)$$

$$v(0,\mathrm{s}) = v(\emptyset + \alpha) * v\left({}^{\alpha}/_{2}\right) \quad e \quad v(\mathrm{s},1) = v(\emptyset + \alpha) * v\left(-{}^{\beta}/_{2}\right)$$

$$v(0,\mathrm{s}) = v(0,1) * \frac{v(\alpha) + E}{\sqrt{\|v(\alpha) + E\|}} v\left({}^{\alpha}/_{2}\right) \quad e \quad v(\mathrm{s},1) = v(0,1) * \frac{v(-\beta) + E}{\sqrt{\|v(-\beta) + E\|}}$$

$$v(0,s) = v(0,1) * \frac{«v(\emptyset)» * v(\emptyset + \alpha) + E}{\sqrt{\|«v(\emptyset)» * v(\emptyset + \alpha) + E\|}}$$

$$v(\mathrm{s},1) = v(0,1) * \frac{«v(\emptyset)» * v(\emptyset - \beta) + E}{\sqrt{\|«v(\emptyset)» * v(\emptyset - \beta) + E\|}}$$

$$v(0,\mathrm{s}) = v(0,1) * \frac{«v(0,2)» * v(0,1) + E}{\sqrt{\|«v(0,2)» * v(0,1) + E\|}}$$
$$v(\mathrm{s},1) = v(0,1) * \frac{«v(0,2)» * v(1,2) + E}{\sqrt{\|«v(0,2)» * v(1,2) + E\|}}$$

$$v(1,\mathrm{d}) = -v\left(\pi + \emptyset - \beta + {}^{\alpha}/_{2}\right) \quad e \quad v(\mathrm{d},2) = -v\left(\pi + \emptyset - \beta - {}^{\beta}/_{2}\right)$$

$$v(1,\mathrm{d}) = v(\emptyset - \beta) * v\left(+{}^{\alpha}/_{2}\right) \quad e \quad v(\mathrm{d},2) = v(\emptyset - \beta) * v\left(-{}^{\beta}/_{2}\right)$$

$$v(1,\mathrm{d}) = v(1,2) * \frac{«v(\emptyset)» * v(\emptyset + \alpha) + E}{\sqrt{\|«v(\emptyset)» * v(\emptyset + \alpha) + E\|}}$$
$$v(\mathrm{d},2) = v(1,2) * \frac{«v(\emptyset)» * v(\emptyset - \beta) + E}{\sqrt{\|«v(\emptyset)» * v(\emptyset - \beta) + E\|}}$$

$$v(1,\mathrm{d}) = v(1,2) * \frac{«v(0,2)» * v(0,1) + E}{\sqrt{\|«v(0,2)» * v(0,1) + E\|}}$$

$$v(\mathrm{d},2)=v(1,2)*\frac{«v(0,2)»*v(1,2)+E}{\sqrt{\|«v(0,2)»*v(1,2)+E\|}}$$

IN SINTESI
sono note le coordinate relative di P0,P1,P2 su XY:

X01,Y01 X12,Y12 X02,Y02=X01+X12,Y01+Y12 si calcolano i versori

$$v01=\frac{(X01,Y01)}{\|(X01,Y01)\|^{½}}\quad v12=\frac{(X12,Y12)}{\|(X12,Y12)\|^{½}}\quad v02=\frac{(X02,Y02)}{\|(X02,Y02)\|^{½}}\quad «v02»=\frac{(X02,-Y02)}{\|(X02,-Y02)\|^{½}}$$

Dove si pone:

$$\mathrm{R01}=\|(\mathrm{X01},\mathrm{Y01})\|^{½}=\sqrt{\mathrm{X01}^2+\mathrm{Y01}^2}\quad \mathrm{R12}=\|(\mathrm{X12},\mathrm{Y12})\|^{½}=\sqrt{\mathrm{X12}^2+\mathrm{Y12}^2}\quad \mathrm{R02}=\|(\mathrm{X02},\mathrm{Y02})\|^{½}=\sqrt{\mathrm{X02}^2+\mathrm{Y02}^2}$$

Quindi si procede nel seguente ordine:
Punto S) scomposizione di V01=(X01,Y01) nelle direzioni $v(0,S)$ e $v(S,1)$
Punto D) scomposizione di V12=(X12,Y12) nelle direzioni $v(1,D)=v(S,1)$ e $v(D,2)$

$$v(0,S)=v01^2*«v02» \qquad e \qquad v(S,1)=v01*v12*«v02»$$

$$v(0,S)=\frac{\begin{pmatrix}X02*X01^2-X02*Y01^2+2*X01*Y01*Y02\\-Y02*X01^2+Y02*Y01^2+2*X01*Y01*X02\end{pmatrix}}{R01^2*R02}$$

$$v(S,1)=\frac{\begin{pmatrix}X01*X12*X02+X01*Y12*Y02+Y01*X12*Y02-Y01*Y12*X02\\Y01*Y12*Y02+X01*Y12*X02+Y01*X12*X02-X01*X12*Y02\end{pmatrix}}{R01*R12*R02}$$

$$v(1,D)=v(S,1) \qquad e \qquad v(D,2)=«v02»*v12^2$$

$$v(D,2)=\frac{\begin{pmatrix}X12^2*X02-X02*Y12^2+2*Y12*X12*Y02\\Y12^2*Y02-Y02*X12^2+2*Y12*X12*X02\end{pmatrix}}{R12^2*R02}$$

E' conveniente trovare prima VS1= V1D e ricavare poi V0S VD2 per differenza di vettori noti:

$$\begin{pmatrix}XS1\\YS1\end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix}X01*R12^2+X12*R01^2\\Y01*R12^2+Y12*R01^2\end{pmatrix}}{R02^2}$$

$$\begin{pmatrix}X0S\\Y0S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X01\\Y01\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}XS1\\YS1\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}X1D\\Y1D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}XS1\\YS1\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}XD2\\YD2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X12\\Y12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X1D\\Y1D\end{pmatrix}$$

Punto s) scomposizione di V01=(X01,Y01) nelle direzioni $v(0,\mathrm{s})$ e $v(\mathrm{s},1)$

Punto d) scomposizione di V12=(X12,Y12) nelle direzioni $v(1,\mathrm{d})$ e $v(\mathrm{d},2)$

$$v(0,\mathrm{s})=v01*\frac{«v02»*v01+E}{\sqrt{\|«v02»*v01+E\|}} \qquad e \quad v(\mathrm{s},1)=v01*\frac{«v02»*v12+E}{\sqrt{\|«v02»*v12+E\|}}$$

$$v(1,\mathrm{d})=v12*\frac{«v02»*v01+E}{\sqrt{\|«v02»*v01+E\|}} \qquad e \quad v(\mathrm{d},2)=v12*\frac{«v02»*v12+E}{\sqrt{\|«v02»*v12+E\|}}$$

Per i versori relativi ai punti s e d sono utili i seguenti fattori:

$$\frac{\ll v02 \gg * v01 + E}{\sqrt{\|\ll v02 \gg * v01 + E\|}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 + \frac{X02 * X01 + Y02 * Y01}{R02 * R01} \\ \frac{X02 * Y01 - Y02 * X01}{R02 * R01} \end{bmatrix}}{\sqrt{2} * \sqrt{\left[1 + \frac{X02 * X01 + Y02 * Y01}{R02 * R01}\right]}}$$

$$\frac{\ll v02 \gg * v12 + E}{\sqrt{\|\ll v02 \gg * v12 + E\|}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 + \frac{X02 * X12 + Y02 * Y12}{R02 * R12} \\ \frac{X02 * Y12 - Y02 * X12}{R02 * R12} \end{bmatrix}}{\sqrt{2} * \sqrt{\left[1 + \frac{X02 * X12 + Y02 * Y12}{R02 * R12}\right]}}$$

$$\frac{\ll v02 \gg * v01 + E}{\sqrt{\|\ll v02 \gg * v01 + E\|}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 + \frac{X02 * X01 + Y02 * Y01}{R02 * R01} \\ \frac{X02 * Y01 - Y02 * X01}{R02 * R01} \end{bmatrix}}{\sqrt{2} * \sqrt{\left[1 + \frac{X02 * X01 + Y02 * Y01}{R02 * R01}\right]}}$$

$$\frac{\ll v02 \gg * v12 + E}{\sqrt{\|\ll v02 \gg * v12 + E\|}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 + \frac{X02 * X12 + Y02 * Y12}{R02 * R12} \\ \frac{X02 * Y12 - Y02 * X12}{R02 * R12} \end{bmatrix}}{\sqrt{2} * \sqrt{\left[1 + \frac{X02 * X12 + Y02 * Y12}{R02 * R12}\right]}}$$

$$v(0,\mathrm{s}) = v01 * \frac{«v02» * v01 + E}{\sqrt{\|«v02» * v01 + E\|}} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \frac{X02 * (X01^2 - Y01^2) + 2 * X01 * Y01 * Y02}{R01 * R02} + X01 \\ \frac{Y02 * (Y01^2 - X01^2) + 2 * X01 * Y01 * X02}{R01 * R02} + Y01 \end{bmatrix}}{\sqrt{2} * R01 * \sqrt{\left[1 + \frac{X02 * X01 + Y02 * Y01}{R01 * R02}\right]}}$$

$$v(\mathrm{s},1) = v01 * \frac{«v02» * v12 + E}{\sqrt{\|«v02» * v12 + E\|}} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \frac{X01 * X12 * X02 + X12 * Y01 * Y02 + X01 * Y12 * Y02 - X02 * Y12 * Y01}{R02 * R12} + X01 \\ \frac{Y01 * Y12 * Y02 + X01 * Y12 * X02 + Y01 * X12 * X02 - X01 * X12 * Y02}{R02 * R12} + Y01 \end{bmatrix}}{\sqrt{2} * R01 * \sqrt{\left[1 + \frac{X02 * X12 + Y02 * Y12}{R02 * R12}\right]}}$$

$$v(1,\mathrm{d}) = v12 * \frac{«v02» * v01 + E}{\sqrt{\|«v02» * v01 + E\|}} =$$

$$= \frac{\left(\begin{matrix} \frac{X01*X12*X02+X12*Y01*Y02+X01*Y12*Y02-X02*Y12*Y01}{R01*R02}+X12 \\ \frac{Y01*Y12*Y02+X01*Y12*X02+Y01*X12*X02-X01*X12*Y02}{R01*R02}+Y12 \end{matrix}\right\rangle}{\sqrt{2}*R12*\sqrt{\left[1+\frac{X02*X01+Y02*Y01}{R01*R02}\right]}}$$

$$v(\mathrm{d},2) = v12 * \frac{«v02»*v12+E}{\sqrt{\|«v02»*v12+E\|}} =$$

$$= \frac{\left[\begin{matrix} \frac{X02*(X12^2-Y12^2)+2*X12*Y02*Y12}{R12*R02}+X12 \\ \frac{Y02*(Y12^2-X12^2)+2*Y12*X02*X12}{R12*R02}+Y12 \end{matrix}\right[}{\sqrt{2}*R12*\sqrt{\left[1+\frac{X02*X12+Y02*Y12}{R12*R02}\right]}}$$

Si procede quindi al calcolo delle coordinate di s e d con l'applicazione della scomposizione di un vettore secondo due direzioni:

$$\begin{pmatrix} Xs1 \\ Ys1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{R12}+\frac{\mathrm{R12}^2}{\mathrm{R02}}\right)*\mathrm{X01}+\frac{\mathrm{R01}^2}{\mathrm{R02}}*\mathrm{X12} \\ \left(\mathrm{R12}+\frac{\mathrm{R12}^2}{\mathrm{R02}}\right)*\mathrm{Y01}+\frac{\mathrm{R01}^2}{\mathrm{R02}}*\mathrm{Y12} \end{pmatrix} \Big/ \mathrm{R02}+\mathrm{R12}+\mathrm{R01}$$

$$X0s = X01 - Xs1 \qquad Y0s = Y01 - Ys1$$

$$\begin{pmatrix} X1d \\ Y1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{R01}+\frac{\mathrm{R01}^2}{\mathrm{R02}}\right)*\mathrm{X12}+\frac{\mathrm{R12}^2}{\mathrm{R02}}*\mathrm{X01} \\ \left(\mathrm{R01}+\frac{\mathrm{R01}^2}{\mathrm{R02}}\right)*\mathrm{Y12}+\frac{\mathrm{R12}^2}{\mathrm{R02}}*\mathrm{Y01} \end{pmatrix} \Big/ \mathrm{R02}+\mathrm{R12}+\mathrm{R01}$$

$$Xd2 = X02 - X1d \qquad Yd2 = Y02 - Y1d$$

Le formule precedenti trovano una significativa espressione se si evidenzia in esse la dipendenza dai parametri metrici $as = {R01^2}/{R02^2}$ $ad = {R12^2}/{R02^2}$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Xs1} \\ \mathrm{Ys1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\mathrm{R12}}{\mathrm{R02}}+\left(\frac{\mathrm{R12}}{\mathrm{R02}}\right)^2\right]*\mathrm{X01}+\left(\frac{\mathrm{R01}}{\mathrm{R02}}\right)^2*\mathrm{X12} \\ \left[\frac{\mathrm{R12}}{\mathrm{R02}}+\left(\frac{\mathrm{R12}}{\mathrm{R02}}\right)^2\right]*\mathrm{Y01}+\left(\frac{\mathrm{R01}}{\mathrm{R02}}\right)^2*\mathrm{Y12} \end{pmatrix} \Big/ 1+\frac{\mathrm{R12}}{\mathrm{R02}}+\frac{\mathrm{R01}}{\mathrm{R02}} = \begin{pmatrix} (\sqrt{\mathrm{ad}}+\mathrm{ad})*\mathrm{X01}+\mathrm{as}*\mathrm{X12} \\ (\sqrt{\mathrm{ad}}+\mathrm{ad})*\mathrm{Y01}+\mathrm{as}*\mathrm{Y12} \end{pmatrix} \Big/ 1+\sqrt{\mathrm{as}}+\sqrt{\mathrm{ad}}$$

$$X0s = X01 - Xs1 \qquad Y0s = Y01 - Ys1$$

$$\begin{pmatrix} X1d \\ Y1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{\mathrm{R01}}{\mathrm{R02}}+\left(\frac{\mathrm{R01}}{\mathrm{R02}}\right)^2\right]*\mathrm{X12}+\left(\frac{\mathrm{R12}}{\mathrm{R02}}\right)^2*\mathrm{X01} \\ \left[\frac{\mathrm{R01}}{\mathrm{R02}}+\left(\frac{\mathrm{R01}}{\mathrm{R02}}\right)^2\right]*\mathrm{Y12}+\left(\frac{\mathrm{R12}}{\mathrm{R02}}\right)^2*\mathrm{Y01} \end{pmatrix} \Big/ 1+\frac{\mathrm{R12}}{\mathrm{R02}}+\frac{\mathrm{R01}}{\mathrm{R02}} = \begin{pmatrix} (\sqrt{\mathrm{as}}+\mathrm{as})*\mathrm{X12}+\mathrm{ad}*\mathrm{X01} \\ (\sqrt{\mathrm{as}}+\mathrm{as})*\mathrm{Y12}+\mathrm{ad}*\mathrm{Y01} \end{pmatrix} \Big/ 1+\sqrt{\mathrm{as}}+\sqrt{\mathrm{ad}}$$

$$Xd2 = X02 - X1d \qquad\qquad Yd2 = Y02 - Y1d$$

Anche le relazioni dei punti S e D possono esprimersi con i parametri metrici:

$$\begin{pmatrix} XS1 \\ YS1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad * X01 + as * X12 \\ ad * X01 + as * X12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X0S \\ Y0S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X01 \\ Y01 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} XS1 \\ YS1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X1D \\ Y1D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XS1 \\ YS1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} XD2 \\ YD2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X12 \\ Y12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X1D \\ Y1D \end{pmatrix}$$

Un ulteriore compattamento lo si ottiene attraverso la forma matriciale:

$$C = \begin{pmatrix} X01 & X12 \\ Y01 & Y12 \end{pmatrix} \qquad as = \frac{X01^2+Y01^2}{X02^2+Y02^2} \qquad ad = \frac{X12^2+Y12^2}{X02^2+Y02^2} \qquad R = \sqrt{as} + \sqrt{ad}$$

$$\begin{pmatrix} X1D \\ Y1D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XS1 \\ YS1 \end{pmatrix} = C * \begin{pmatrix} ad \\ as \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X0S & XD2 \\ Y0S & YD2 \end{pmatrix} = C - C * \begin{pmatrix} ad & ad \\ as & as \end{pmatrix} = C * \begin{pmatrix} 1 - ad & -ad \\ -as & 1 - as \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Xs1 & X1d \\ Ys1 & Y1d \end{pmatrix} = \left. C * \begin{pmatrix} \sqrt{ad} + ad & ad \\ as & \sqrt{as} + as \end{pmatrix} \middle/ 1 + R \right. \qquad \begin{pmatrix} X0s & Xd2 \\ Y0s & Yd2 \end{pmatrix} = C - \begin{pmatrix} Xs1 & X1d \\ Ys1 & Y1d \end{pmatrix}$$

Le precedenti sono valide nel riferimento X,Y sul piano dei punti P0,P1,P2; esse trovano una prima generalizzazione introducendo l'asse Z ovviamente ortogonale a XY con le coordinate ad esso relative nulle:

$$C = \begin{pmatrix} X01 & X12 \\ Y01 & Y12 \\ Z01 & Z12 \end{pmatrix} \quad as = \frac{X01^2 + Y01^2 + Z01^2}{X02^2 + Y02^2 + Z02^2} \quad ad = \frac{X12^2 + Y12^2 + Z12^2}{X02^2 + Y02^2 + Z02^2} \quad R = \sqrt{as} + \sqrt{ad}$$

$$\begin{pmatrix} X1D \\ Y1D \\ Z1D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XS1 \\ YS1 \\ ZS1 \end{pmatrix} = C * \begin{pmatrix} ad \\ as \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X0S & XD2 \\ Y0S & YD2 \\ Z0S & ZD2 \end{pmatrix} = C - C * \begin{pmatrix} ad & ad \\ as & as \end{pmatrix} = C * \begin{pmatrix} 1 - ad & ad \\ as & 1 - as \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Xs1 & X1d \\ Ys1 & Y1d \\ Zs1 & Z1d \end{pmatrix} = \left. C * \begin{pmatrix} \sqrt{ad} + ad & ad \\ as & \sqrt{as} + as \end{pmatrix} \middle/ 1 + R \right. \qquad \begin{pmatrix} X0s & Xd2 \\ Y0s & Yd2 \\ Z0s & Zd2 \end{pmatrix} = C - \begin{pmatrix} Xs1 & X1d \\ Ys1 & Y1d \\ Zs1 & Z1d \end{pmatrix}$$

in qualunque altro riferimento cartesiano x,y,z, legato al precedente attraverso la matrice ortogonale A ($A^{-1}=A^T$), i parametri R as e ad e le matrici da essi dipendenti sono invarianti, in quanto dipendenti da distanze e queste sono invarianti in qualunque riferimento ortogonale di SC, pertanto il precedente formulario non cambia qualunque sia il riferimento 3D.

Si osserva, ancora una volta, che la definizione dei parametri metrici as,ad è possibile solo se $\overline{P0,P2}$ è un segmento non nullo, pertanto non si deve verificare che esista in £ una terzina di punti consecutivi nella numerazione dove il terzo punto è sovrapposto al primo; tale condizione, già prevista nelle specifiche generali di £ è indispensabile affinché i parametri as, ad e R siano definibili.