CERCHI

Camillo Rita
e-Mail: linusfree@alice.it
web: http://www.webalice.it/linusfree

Si tratta di un vecchio problema proposto da un amico, che a sua volta l'aveva preso dalla rivista "Le Scienze", "tanto tempo fa" intorno alla metà degli anni '80.

PROBLEMA

siano: $\Re e \equiv$ l'Insieme dei numeri reali
$\Re e^{+} \equiv$ l'Insieme dei numeri reali positivi
$\Im \equiv$ l'Insieme dei numeri interi positivi
$\beta \equiv$ l'Insieme $\{0,1\}$

DETERMINARE LE CARATTERISTICHE DELLA CONFIGURAZIONE GRAFICA SUL MONITOR DI UN CALCOLATORE DIGITALE DEL SEGUENTE INSIEME:

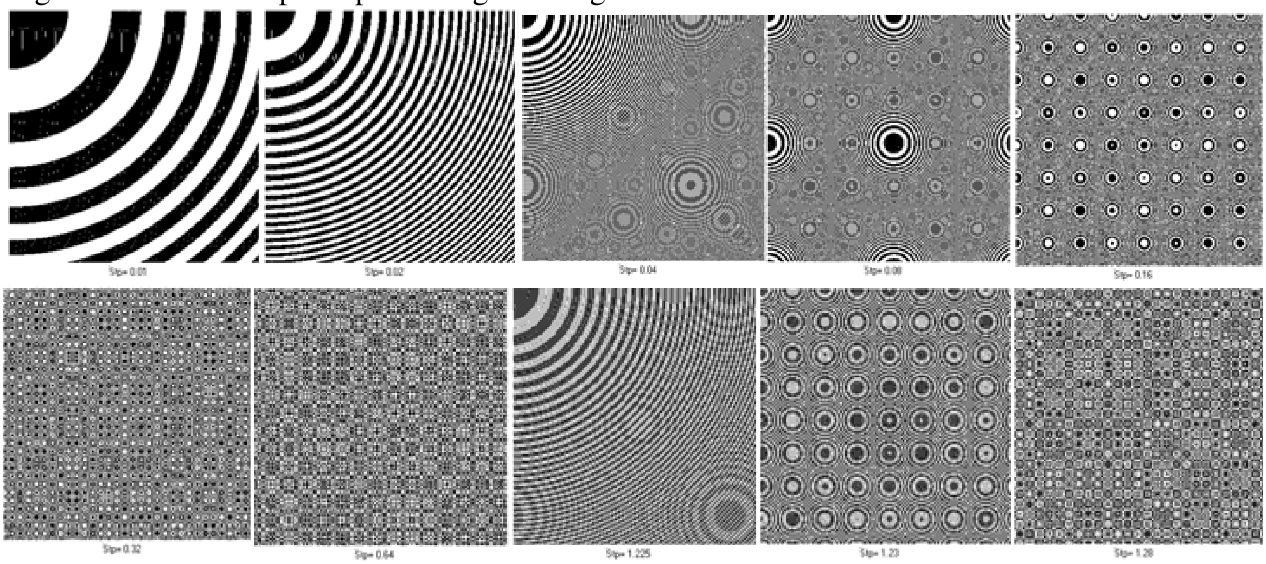
$(f \in \beta)$ $f = 1$ se $\exists n \in \Im$: $2*n = \mathrm{INT}(x^2+y^2)$, $\forall (x,y) \in (\Re e \times \Re e)$ altrimenti $f = 0$

in parole: se per x,y reali $\mathrm{INT}(x^2+y^2)$ è pari $f = 1$ altrimenti $f = 0$

In corrispondenza sul monitor in (x,y) f appare con un punto acceso se $f = 1$ con un punto spento se $f = 0$.
Il grafico che ci si aspetta è costituito da bande circolari nere alternate a bande circolari bianche ambedue centrate nell'origine. L'implementazione su calcolatore può essere fatta con il seguente programmino in BASIC:

```
Stp=0.31:W=400:
For i=0 To W:For j=0 to W
Dq(i*i+j*j)*Stp*Stp:
If(dq Mod 2)=0 Then  PSet(i,j)
Next j:Next i
```

Scegliendo vari valori per Stp si ottengono I seguenti risultati:



Le prime due figure, Stp=0.01 e Stp=0.02, sembrano “rispondere” alle attese ma all’aumentare di Stp nelle figure compaiono delle periodicità di non immediata comprensione.

Forse esistono tecniche specifiche canoniche per l’approccio al problema, in alternativa a queste e nel contesto della rivista, rivolta a un pubblico vasto, una soluzione dedicata può essere la seguente:

SVOLGIMENTO

I quadrati di x e y nella definizione dell’insieme consentono di trattare i quattro quadranti del piano XY in maniera equivalente e intercambiabile; non è restrittivo quindi limitare le considerazioni a quella parte di f che occupa il 1° quadrante:

$$(f \in \beta)\ \ f = 1 \text{ se } \exists n \in \Im : \forall (x,y) \in (\Re e^{+} \times \Re e^{+}),\ \ 2*n = \mathrm{INT}(x^2+y^2) \ \text{ altrimenti } f = 0$$

f è invariante rispetto allo scambio delle variabili, x con y, e ciò permette l’ulteriore semplificazione di considerare una di queste come parametro; per esempio posto $y^2=k$ l’insieme in esame si riduce al seguente:

$$\forall k \qquad (f \in \beta)\ \ f = 1 \text{ se } \exists n \in \Im : \forall (x,k) \in (\Re e^{+} \times \Re e^{+}),\ \ 2*n = \mathrm{INT}(x^2+k) \ \text{ altrimenti } f = 0$$

A tale insieme può essere data una rappresentazione più operativa con le seguenti considerazioni:

-Sul ramo destro della parabola che da x va in (x^2+k), per un qualsiasi fissato valore di k, si distinguono:

le ascisse Pi inizi degli intervalli di quegli x dove x^2+k assume un valore intero pari

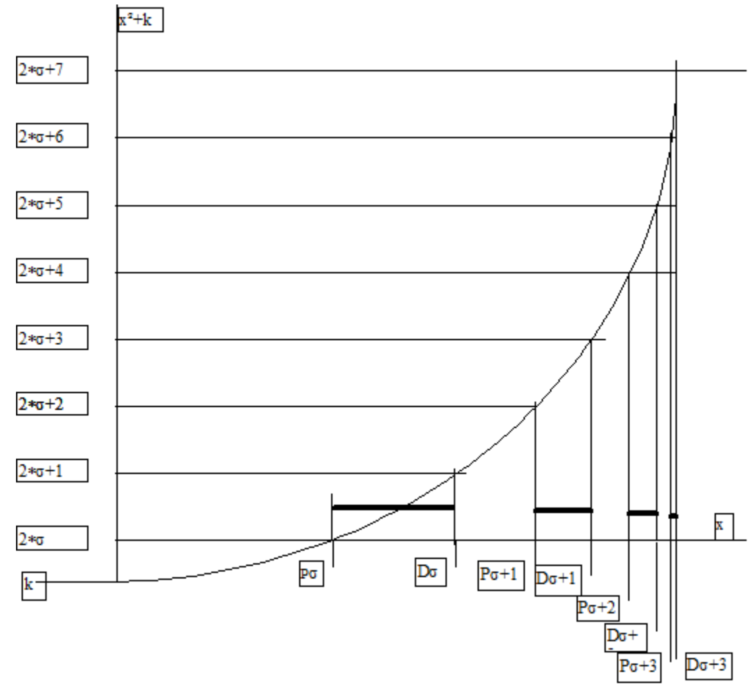
e le ascisse Di inizi degli intervalli di quegli x dove x^2+k assume un valore intero dispari.

in entrambi i casi l’indice "i" di Pi e Di è un intero d’ordinamento.

-Dalla definizione di Pi e Di si ricavano le rispettive relazioni:

$$\forall\, i \in \Im \quad (\exists\, Pi, \exists Di) \in Re^{+} :$$
$$\left(2 * i = Pi^2 + k \rightarrow Pi = \sqrt{2 * i - k}\right), \left(2 * i + 1 = Di^2 + k \rightarrow Di = \sqrt{2 * i - k + 1}\right)$$

In parole: comunque i intero si ricava un $Pi = \sqrt{2 * i - k}$ e un $Di = \sqrt{2 * i - k + 1}$, reali positivi, tali che: $Pi^2 + k = 2 * i$ è pari e $Di^2 + k = 2 * i + 1$ è dispari.



Negli intervalli [Pi,Di) di x il troncamento all'intero di x^2+k è un intero pari; mentre negli intervalli [Di,Pi+1) di x il troncamento all'intero di x^2+k è un intero dispari; pertanto l'insieme f_k dei punti in cui $f = 1$:

$$f_k \equiv \bigcup_{i=\sigma}^{\infty} [\mathrm{Pi},\mathrm{Di}) = \bigcup_{i=\sigma}^{\infty} \left[\sqrt{2*i-k},\sqrt{2*i-k+1}\right)$$

Sul video, fatto di pixel, l'insieme f_k compare filtrato dalla discretizzazione di ampiezza costante dx>0 dell'asse x delle ascisse.
l'insieme filtro dovuto alla discretizzazione del video, per la parte riguardante l'asse x, è il seguente:

$$f_d \equiv \{x \in \mathrm{Re}^+ : \exists j \in \mathfrak{J} \to x = j*dx \quad (dx \in \mathrm{Re}^+)\} \quad \text{in altri termini:}$$

$$f_d \equiv \bigcup_{i=0}^{\infty} j*dx \qquad j \in \mathfrak{J}$$

L'insieme f_v che compare luminoso sul video, immagine filtrata di f_k è quello in cui x,y di f_k trova in corrispondenza sul video un pixel da accendere:

$$f_v \equiv f_k \bigcap f_d \equiv \left[\bigcup_{i=\sigma}^{\infty} \left[\sqrt{2*i-k},\sqrt{2*i-k+1}\right]\right] \bigcap \left[\bigcup_{j=0}^{\infty} j*dx\right]$$

Tale insieme in sostanza si compone di quegli x=j*dx per cui esiste una coppia di interi i e j in grado di soddisfare la seguente:

$$\sqrt{2*i-k} \le j*dx \le \sqrt{2*i-k+1} \qquad i,j \in \mathfrak{J}$$

mentre i punti non luminosi sul video corrisponderanno a quegli x=j*dx per cui esiste una coppia di interi i e j in grado di soddisfare la seguente:

$$\sqrt{2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1} \le \mathrm{j}*\mathrm{dx} \le \sqrt{2*(\mathrm{i}+1)-\mathrm{k}} \qquad \mathrm{i},\mathrm{j}\in\Im$$

Formalizzando le precedenti, dopo aver identificato con la lettera £ l'insieme dei punti luminosi e con la lettera $ l'insieme dei punti spenti sul video, si scrive:

$$£ \equiv \left\{\mathrm{j}\in\Im: (\exists \mathrm{i}\in\Im) \to \left[\sqrt{2*\mathrm{i}-\mathrm{k}} \le \mathrm{j}*\mathrm{dx} \le \sqrt{2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1}\right]\right\}$$
$$\$ \equiv \left\{\mathrm{j}\in\Im: (\exists \mathrm{i}\in\Im) \to \left[\sqrt{2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1} \le \mathrm{j}*\mathrm{dx} \le \sqrt{2*(\mathrm{i}+1)-\mathrm{k}}\right]\right\}$$

In corsivo:
i punti luminosi £ sono quelli relativi a valori di j (con j ordine dei pixel) per i quali esiste un i tale che $\sqrt{2*\mathrm{i}-\mathrm{k}} \le \mathrm{j}*\mathrm{dx} \le \sqrt{2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1}$
i punti bui $ sono quelli relativi a valori di j (con j ordine dei pixel) per i quali esiste un i tale che $\sqrt{2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1} \le \mathrm{j}*\mathrm{dx} \le \sqrt{2*(\mathrm{i}+1)-\mathrm{k}}$

Naturalmente $£\cap\$ \equiv \Phi$ e $£\cup\$ \equiv \Im$
Per distinguere gli interi j appartenenti a £ da quelli appartenenti a $ si useranno per essi due lettere distinte, rispettivamente la lettera l per gli interi dell'insieme £ e la lettera s per gli interi dell'insieme $.

AFFERMAZIONI

a) la radice $\sqrt{2*\mathrm{i}-\mathrm{k}}$ è reale quindi:
$$2*\mathrm{i}-\mathrm{k}\ge 0 \quad\to\quad 2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1>0 \quad\to\quad 2*(\mathrm{i}+1)-\mathrm{k}>0$$
b) Se a) allora:
r1) $\{\mathrm{l}\in\Im: (\exists \mathrm{i}\in\Im) \to [2*\mathrm{i}-\mathrm{k} \le \mathrm{l}^2*\mathrm{dx}^2 < 2*i-k+1]\}$
r2) $\{\mathrm{s}\in\Im: (\exists \mathrm{i}\in\Im) \to [2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1 \le \mathrm{s}^2*\mathrm{dx}^2 < 2*(\mathrm{i}+1)-\mathrm{k}]\}$

Le due relazioni, r1) e r2), in sostanza affermano che un punto è l (luminoso) se esiste un i tale che $2*\mathrm{i}-\mathrm{k} \le \mathrm{l}^2*\mathrm{dx}^2 < 2*i-k+1$ altrimenti per tale punto esiste un i tale che $2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1 \le \mathrm{s}^2*\mathrm{dx}^2 < 2*(\mathrm{i}+1)-\mathrm{k}$ e quindi esso è s (spento).

TEOREMA

Condizione necessaria e sufficiente affinché f_{v} sia periodica deve $\exists \mathrm{m}\in\Im: \left({}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{dx}^2}\in\Im\right)$ (oppure ${}^{1}/_{\mathrm{dx}^2}$ e dx^2 sono razionali, cosa sicuramente vera su calcolatore).

DIMOSTRAZIONE

La condizione è SUFFICIENTE infatti:
fissata l'attenzione sulle relazioni di definizione degli insiemi £ e $ se si somma ad ogni termine di tali relazioni rispettivamente :

per £ $\qquad 2*\mathrm{l}*\mathrm{m}+{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{dx}^2}$

per $ $\qquad 2*\mathrm{s}*\mathrm{m}+{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{dx}^2}$ $\qquad$ con $\mathrm{m}\in\Im$, si ottiene:

$$£ \Rightarrow \left[2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+2*\mathrm{l}*\mathrm{m}+{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{dx}^2} \le \mathrm{l}^2*\mathrm{dx}^2+2*\mathrm{l}*\mathrm{m}+{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{dx}^2} < 2*i-k+1+2*l*m+{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{dx}^2}\right]$$
$$\$ \Rightarrow \left[2*\mathrm{i}-\mathrm{k}+1+2*\mathrm{s}*\mathrm{m}+{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{dx}^2} \le \mathrm{s}^2*\mathrm{dx}^2+2*\mathrm{s}*\mathrm{m}+{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{dx}^2} < 2*(\mathrm{i}+1)-\mathrm{k}+2*\mathrm{s}*\mathrm{m}+{}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{dx}^2}\right]$$

Ordinando:

$$£ \Rightarrow \left[2 * (i + l * m) + {}^{m^2}\!/_{dx^2} - k \le \left(l + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * (i + l * m) + {}^{m^2}\!/_{dx^2} - k + 1\right]$$
$$\$ \Rightarrow \left[2 * (i + s * m) + {}^{m^2}\!/_{dx^2} - k + 1 \le \left(s + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * (i + s * m + 1) + {}^{m^2}\!/_{dx^2} - k\right]$$

per ipotesi $\quad m, \left({}^{m}\!/_{dx^2}\right) \in \Im \quad \rightarrow \quad \left({}^{m^2}\!/_{dx^2}\right) \in \Im$

Caso a) Se si pone ${}^{m^2}\!/_{dx^2} = 2 * n' \quad$ con $n' \in \Im$

$$\left[2 * (i + l * m + n') - k \le \left(l + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * (i + l * m + n') - k + 1\right]$$
$$\left[2 * (i + s * m + n') - k + 1 \le \left(s + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * (i + s * m + n' + 1) - k\right]$$

Caso b) Se invece si pone ${}^{m^2}\!/_{dx^2} = 2 * n' + 1 \quad$ con $n' \in \Im$

$$\left[2 * (i + l * m + n') - k + 1 \le \left(l + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * (i + l * m + n' + 1) - k\right]$$
$$\left[2 * (i + s * m + n' + 1) - k \le \left(s + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * (i + s * m + n' + 1) - k + 1\right]$$

le quattro relazioni ottenute sono ancora relazioni £ e \$ ma non più riferite a l o a s ma rispettivamente a $l+m/dx^2$ e $s+m/dx^2$; infatti posto:

$$i + l * m + n' \equiv j_l \in \Im \qquad i + s * m + n' \equiv j_s \in \Im \qquad i + s * m + n' + 1 \equiv j \in \Im$$

Caso a)

$$\left[2 * j_l - k \le \left(l + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * j_l - k + 1\right] \quad £\left(r1) \text{ dove al posto di l c'è } l + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)$$
$$\left[2 * j_s - k + 1 \le \left(s + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * j_s - k\right] \quad \$\left(r2) \text{ dove al posto di s c'è } s + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)$$

Caso b)

$$\left[2 * j_l - k + 1 \le \left(l + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * j_l - k\right] \quad \$\left(r2) \text{ dove al posto di s c'è } l + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)$$
$$\left[2 * j - k \le \left(s + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)^2 * dx^2 < 2 * j - k + 1\right] \quad £\left(r1) \text{ dove al posto di l c'ès } + {}^{m}\!/_{dx^2}\right)$$

in altre parole:
- se $(m/dx)^2$ è pari, caso a), una traslazione sul video di $m/dx^2 \in \Im$ pixel, porta da punti £ a punti £ e da punti \$ a punti \$;
-se invece $(m/dx)^2$ è dispari, caso b), una traslazione sul video di $m/dx^2 \in \Im$ pixel, porta da punti £ a punti \$ e da punti \$ a punti £.

La conclusione può riassumersi dicendo che:
- se $(m/dx)^2$ è pari allora $m/dx^2=T$ è una periodicità di f_v sullo schermo altrimenti

- se $(m/dx)^2$ è dispari allora $2* m/dx^2=T$ è una periodicità di f_v sullo schermo.
cioè noti i primi T punti è nota tutta la sequenza di f_v in x.

La condizione è NECESSARIA infatti:
Se è vera la tesi, $T\in\mathfrak{I}$ è un periodo per i punti di f_v sullo schermo, allora $\forall n°\in \mathfrak{I}$ i punti l, l+n°*T rispettano le due relazioni di tipo £ e i punti s,s+n°*T rispettano due relazioni di tipo $
(punti distanti n°*T da punti luminosi sono punti luminosi e punti distanti n°*T da punti spenti sono punti spenti); usando le relazioni r1) e r2):

£ se $[2*i-k \le l^2*dx^2 < 2*i-k+1]$ allora $[2*i'-k \le (l+n°*T)^2*dx^2 < 2*i'-k+1]$
$ se $[2*i-k+1 \le s^2*dx^2 < 2*(i+1)-k]$ allora $[2*i'-k+1 \le (s+n°*T)^2*dx^2 < 2*(i'+1)-k]$

ciascuna coppia può riunirsi in una sequenza di diseguaglianze; infatti gli estremi di ciascuna diseguaglianza determinano, per ciascuna coppia, intervalli disgiunti e quelli relativi alle seconde relazione sono successivi a quelli relativi alle prime relazioni ($l < (l+n°*T)^2$ e $s < (s+n°*T)^2$.

£ → $2*i-k \le l^2*dx^2 < 2*i-k+1 \le 2*i'-k \le (l+n°*T)^2*dx^2 < 2*i'-k+1$
$ → $2*i-k+1 \le s^2*dx^2 < 2*(i+1)-k \le 2*i'-k+1 \le (s+n°*T)^2*dx^2 < 2*(i'+1)-k$

Ciascuna delle precedenti catene di relazioni ha sei termini; esaminate in parallelo, si può affermare per ciascuna di esse che la differenza tra il quinto termine e il secondo è sicuramente minore della differenza tra il sesto termine e il primo ma è sicuramente maggiore della differenza tra il quarto termine e il terzo:

£ → $(2*i'-k)-(2*i-k+1) < (l+n°*T)^2*dx^2 - l^2*dx^2 < (2*i'-k+1)-(2*i-k)$
$ → $(2*i'-k+1)-[2*(i+1)-k] < (s+n°*T)^2*dx^2 - s^2*dx^2 < [2*(i'+1)-k]-(2*i-k+1)$

Semplificando

$$£ \to 2*(i'-i)-1 < ((n°*T)^2+2*l*n°*T)*dx^2 < 2*(i'-i)+1$$
$$\$ \to 2*(i'-i)-1 < ((n°*T)^2+2*s*n°*T)*dx^2 < 2*(i'-i)+1$$

Praticamente sia la catena £ che quella $ conducono ad un'unica relazione, prescindendo dal diverso significato di l e s, su cui fissare l'attenzione, il ruolo di l e s può generalizzarsi sostituendoli con $j\in\mathfrak{I}$, inoltre si pone: $2*(i'-i) = m \in \mathfrak{I}$ quindi:

$$m-1 < ((n°*T)^2+2*j*n°*T)*dx^2 < m+1$$

si dividere la precedente per $(n°*dx)^2$:

$$\frac{m}{(n°*dx)^2} - \frac{1}{(n°*dx)^2} < T^2 + \frac{2*j*T}{n°} < \frac{m}{(n°*dx)^2} + \frac{1}{(n°*dx)^2}$$

Che si può riscrivere anche nel seguente modo:

$$-\frac{1}{(n°*dx)^2} < T^2 - \frac{m}{(n°*dx)^2} + \frac{2*j*T}{n°} < \frac{1}{(n°*dx)^2}$$

Fissato T e j , la periodicità n°*T vale $\forall n°\in\mathfrak{I}$, pertanto la precedente è di fatto una successione su n° di diseguaglianze vere per almeno un m $\forall n°$; tale successione converge alla seguente:

$$T^2 - \frac{m}{(n° * dx)^2} = 0$$

nel senso che per $n° \rightarrow \infty$ $m \in \mathfrak{I}$ deve essere tale da consentire la precedente:

$$(n° * T)^2 = \frac{m}{dx^2}$$

$$(n° * T)^2 \in \mathfrak{I} \quad \rightarrow \quad \frac{m}{dx^2} \in \mathfrak{I}$$

Cioè deve esistere un m intero tale che $\frac{m}{dx^2}$ è intero IPOTESI
La simmetria di x con y rende immediata la traslazione delle conclusioni per y.