La sezione aurea è dappertutto!

Francesco Daddi

settembre 2010

Consideriamo un disco di raggio R e pratichiamo un foro circolare di raggio $r < R$ in modo tale che il foro sia tangente internamente al disco; il centro di massa G del disco forato si trova, per evidenti questioni di simmetria, sulla retta passante per il centro O del disco intero e per il centro C del foro.

Fissiamo allora un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in modo che l'origine coincida con il punto O, l'asse x sia proprio la retta per OC e l'unità di misura sia tale che risulti $x_C = R - r$ (si veda la figura);

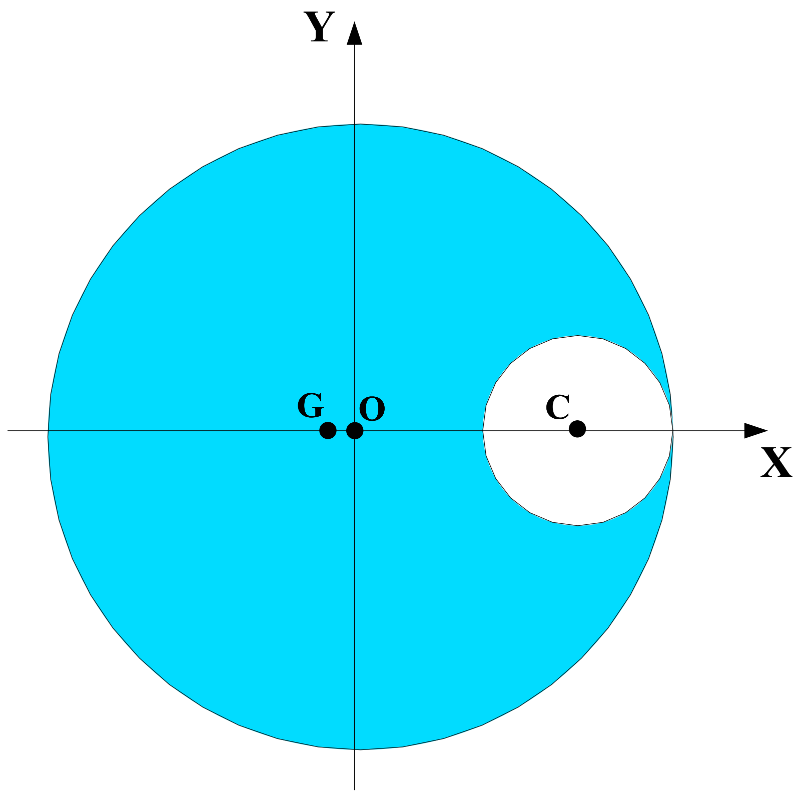

Figura 1: il centro di massa della regione colorata è il punto G.

il centro di massa G ha ordinata nulla ($y_G = 0$) e ascissa x_G data dalla relazione seguente:

$$\frac{(\pi R^2 - \pi r^2)x_G + \pi r^2 x_C}{(\pi R^2 - \pi r^2) + \pi r^2} = x_O \quad \Rightarrow \quad \frac{(\pi R^2 - \pi r^2)x_G + \pi r^2 x_C}{\pi R^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_G = -\frac{r^2}{(R^2 - r^2)}\, x_C$$

dal momento che $x_C = R - r$, abbiamo:

$$x_G = -\frac{r^2}{(R^2 - r^2)}\,(R - r) \quad \Rightarrow \quad x_G = -\frac{r^2}{R + r}\,.$$

A questo punto vogliamo vedere qual è l'intervallo di r affinché il centro di massa G appartenga al disco forato (ovvero affinché G stia nella zona colorata); dobbiamo risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x_G < R - 2\,r \\ 0 < r < R \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} -\dfrac{r^2}{R+r} < R - 2\,r \\ \\ 0 < r < R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{r^2 + R\,r - R^2}{R+r} < 0 \\ \\ 0 < r < R \end{cases}$$

dal momento che $R + r > 0$, abbiamo

$$\begin{cases} r^2 + R\,r - R^2 < 0 \\ 0 < r < R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r \in \left(0\,;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,R \right) \,.$$

La situazione "limite" (ovvero quando G si trova sul bordo del foro circolare) si verifica quando $x_G = R - 2\,r$, cioè per $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,R$: in questo caso il rapporto $\dfrac{R}{r}$ è pari alla ***sezione aurea:***

$$\frac{R}{r} = \frac{R}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

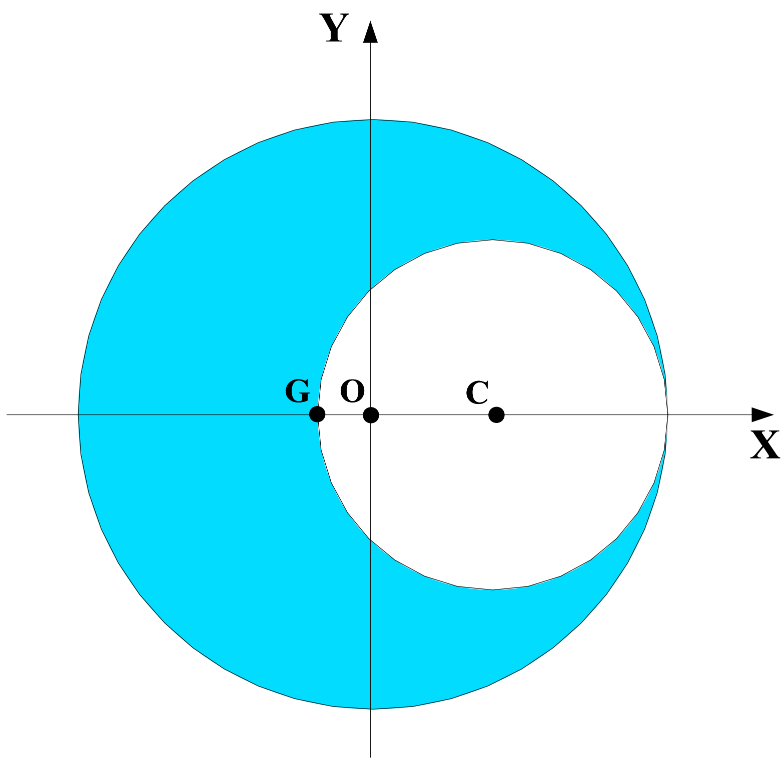

Figura 2: se il rapporto dei raggi è uguale alla sezione aurea, il punto G sta sul bordo del foro.

Osservazione. Se facciamo il limite per $r \to R$ (ovvero quando il foro tende a diventare grande quanto tutto il disco) scopriamo che

$$\lim_{r \to R} x_G = \lim_{r \to R} -\frac{r^2}{R+r} = -\frac{R}{2}\,.$$