Cognome e nome ....

Numero di matricola ....

Email ....

Ingegneria Meccanica

Geometria e Algebra Lineare

Anno accademico 2013/2014 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Sia $T : (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \to (x - y, 2\,x + z, y - z, z)^T \in \mathbb{R}^4$.
Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $\dim\,(\ker T) = 1$ V F

b) $\dim\,(\mathrm{Im}\ T) = 2$ V F

c) $\ker T = \mathrm{Span}\ \{(1, -1, 2)\}$ V F

d) $T^{-1}(0, 0, 0, 0)$ e' sottospazio di $\mathbb{R}^3$ V F

e) $(0, 0, 0, 1)^T \oplus \mathrm{Im}\ T = \mathbb{R}^3$ V F

Esercizio 2. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con k, h parametri reali:

$$\begin{cases} h\,x - y + (1-h)\,z = 0 \\ x + (1-h)\,z = -1 + h + k \\ (1-h)\,x + y + (2-h)\,z = 1 - h - k \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di h e k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

b) determinare eventuali valori di h e k per cui il sistema non ammette soluzione:

c) determinare eventuali valori h e k per cui il sistema ammette infinite soluzioni:

Esercizio 3. Sia A' la matrice completa relativa al sistema dell'esercizio n.2 e sia $L_{A'} : (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \to (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare avente A' come matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$;

a) determinare i valori di h e k per cui $\dim\ \mathrm{Im}\ L_{A'} = 3$:

b) determinare i valori di h e k per cui dim ker $L_{A'} = 2$:

c) per $h = 2$ e $k = -1$, determinare la controimmagine del vettore $e_1 - e_2 - 2\,e_3$, specificando se si tratta di un sottospazio vettoriale.

Esercizio 4. a) Assegnate le rette $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4\,t \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 1 \\ 2\,y - z = 3 \end{cases}$ determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.

b) Determinare una rappresentazione cartesiana per il luogo dei punti dello spazio $P = (x, y, z)$ appartenenti al piano π ed aventi distanza 5 dal punto $Q = (2, 2, -2)$. Di che cosa si tratta?

Esercizio 5. a) Le equazioni delle sfere tangenti nell'origine al piano $\alpha : x - y + z = 0$ e tangenti ulteriormente al piano $\beta : x + y - z = 1$:

Esercizio 6. Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare con dim $V = n$ e dim $W = m$.
Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) dim Im $T = n \Longrightarrow n \leq m$ V F

b) dim ker $T = 0 \Longrightarrow n = m$ V F

c) T iniettiva $\Longrightarrow$ ker $T = \{0_V\}$ V F

d) $n = m \ \wedge$ dim (ker $T) = 1 \Longrightarrow T$ non surgettiva V F

Esercizio 7. Date la matrice quadrata A, di ordine 5 a coefficienti reali.
Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $A^2 = A \implies \det A \neq 0$ V F

b) $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}\,(A^2) \implies \ker\,(A) \supsetneq \ker\,(A^2)$ V F

c) $A^2 = A \implies \ker\,(A) \cap \mathrm{Im}\,(A) = \{0_V\}$ V F

d) $A^2 = A \implies \mathrm{Im}\,(A^5) = \mathrm{Im}\,(A)$ V F