

Cognome e nome Numero di matricola

Email

Ingegneria Meccanica - Geometria e Algebra Lineare
Anno accademico 2014/2015 - Primo compito in itinere

Esercizio 1. Dato il seguente sistema nelle incognite x, y, z con k parametro reale:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + ky + kz = k - 1 \\ x - y + kz = -2 \end{cases}$$

a) determinare eventuali valori di k per cui il sistema ammette una e una sola soluzione:

b) determinare eventuali valori di k per cui il sistema non ammette soluzione:

Esercizio 2. Sia \mathcal{S} il sottoinsieme dello spazio $M_{2,2}(\mathbb{R})$, matrici reali di ordine 2, costituito dalle matrici $A = (a_{i,j})$ con $(a_{11} + a_{22} = 0) \wedge (a_{12} + a_{21} = 0)$.

a) Scrivere il generico elemento di \mathcal{S} e, se \mathcal{S} e' un sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$, determinarne una base:

b) Indicato con \mathcal{A} il sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche, determinare il generico elemento di $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$:

Esercizio 3. a) Sia determini la matrice A associata rispetto alla basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^4 all'applicazione $L_A : (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - kz, 2x + y + (1 - k)z, ky, 2x + (1 - k)z)^T \in \mathbb{R}^4$.

b) determinare eventuali valori di k per cui L_A e' surgettiva:

c) determinare eventuali valori di k per cui $\dim(\ker L_A) = 1$ ed una base per il corrispondente $\text{Im}(L_A)$:

d) determinare eventuali valori di k per cui $(0, 0, 0, 1)^T \in \text{Im}(L_A)$

Esercizio 4. a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per $A = (1, 0, 1)$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r_P passanti per $P = (3, -1, 1)$ e parallele al piano α .

c) Scrivere l'equazione cartesiana della generica sfera tangente al piano α in A .

d) Tra le sfere di cui al punto c) individuare la sfera S tangente al piano π . Tra le rette r_P di cui al punto b) scrivere equazioni cartesiane della retta tangente ad S .

Esercizio 5. Si risolva il sistema nelle variabili complesse z e w :

$$\begin{cases} (z + w)^3 = i \\ z - w = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Esercizio 6. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Gli autovalori di A ed i corrispondenti autospazi sono:

b) Si determinino gli eventuali valori del parametro reale k per cui $(3 + 2k, -k + 1, 1)^T$ e' autovettore di A .

Esercizio 7. Date le matrici quadrate A e B di ordine 4 a coefficienti reali, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $\text{rg}(A) = 4, A^2B = 0 \Rightarrow \text{rg}(B) \geq 1$ V F

b) $\det(A) \neq 0, B^2A = A \Rightarrow B = \pm I$ V F

c) $A^3 = 0 \Rightarrow \text{Im}(A^2) \subseteq \ker(A)$ V F

d) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ ammette l'autovalore 0 V F

e) Se $\text{rg}A = 3$ e $\text{rg}B = 3$ indicare quali tra i seguenti casi sono possibili:

• $\text{rg}(A^2B) = 0$ • $\text{rg}(A^2B) = 1$ • $\text{rg}(A^2B) = 2$ • $\text{rg}(A^2B) = 3$ • $\text{rg}(A^2B) = 4$