Prof. Fernando D'Angelo. PLS09.

Approfondimenti sui Teoremi di esistenza degli zeri e sul metodo di Newton.

1- Teorema (di esistenza della radice).

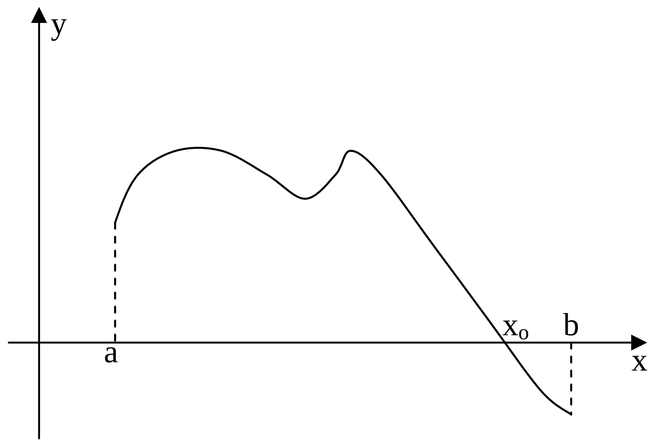
Se *f(x)* è un funzione definita e continua nell'intervallo chiuso *[a ; b]* e se *risulta f(a)·f(b)* < 0, ossia se la *funzione f(x)* assume, negli estremi dell'intervallo, valori di segno opposto, allora l'equazione *f(x)=0* ha almeno una radice interna a tale intervallo.

Commento.
La tesi consegue dal fatto che se una funzione è definita e continua in un intervallo chiuso e limitato allora l'immagine del dominio, *f([a ; b])*, è anch'essa un intervallo chiuso e limitato *I* ; poiché l'intervallo *I* ha estremi di segno opposto per ipotesi, deve evidentemente contenere il valore 0, valore che la funzione assumerà in almeno un punto x_o dato che è continua, cioè $f(x_o)=0$.

2- Primo teorema di unicità della radice
Sia *f(x)* una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso *[a ; b]* e derivabile nei suoi punti interni. Sia inoltre *f(a)·f(b)* < 0 e sia $f'(x)\neq 0$ in *(a , b)*.
Allora esiste un'unica soluzione dell'equazione *f(x)=0* appartenente all'intervallo aperto *(a ; b)*.

Commento.
Si osservi che il teorema esprime una condizione sufficiente (ma non necessaria) per l'unicità della soluzione.

Ciò significa che si possono considerare casi in cui alcune delle ipotesi (o tutte) del teorema non siano soddisfatte e tuttavia la funzione ammetta un'unica radice.
Esempio.
Si consideri la funzione avente il grafico sottostante. L'ipotesi $f'(x)\neq 0$ in *(a , b)* è palesemente violata, tuttavia l'equazione *f(x)=0* ha un'unica radice x_o !



3-Secondo teorema di unicità della radice
Sia *f(x)* una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso *[a ; b]* e derivabile due volte nei punti interni di tale intervallo. Sia anche *f(a)·f(b)* < 0 e *f''(x)* sia in *(a , b)*, sempre positiva o sempre negativa.
Allora l'equazione *f(x)=0* ha una e una sola soluzione nell'intervallo aperto (a ; b).

Dimostrazione.
Innanzitutto consideriamo il caso $f''(x)>0$ in *(a , b)* (il caso $f''(x)<0$ in *(a , b)* si dimostra in modo analogo).
Essendo $f''(x)>0$ in *(a , b)* la derivata prima $f'(x)>0$ è monotona crescente in senso stretto in *(a , b)* (la derivata seconda è la derivata della derivata prima!)
Distinguiamo due casi:

(a) *f'(x)* nell'intervallo (a ; b) è sempre positiva, oppure sempre negativa. In questo caso sono allora soddisfatte tutte le ipotesi del primo teorema di unicità della radice e perciò l'equazione *f(x)=0* ha una e una sola soluzione nell'intervallo considerato.

(b) *f' (x)* assume, al variare di *x* nell'intervallo *(a ; b)*, sia valori positivi sia valori negativi (vedi la fig.1 a lato). Essendo *f'(x)* crescente, i punti in cui assume valori negativi precedono quelli in cui assume valori positivi, dunque *f'(a) < 0 e f'(b) > 0* che comporta *f'(a) · f'(b) < 0*. Essendo *f'(x)* continua in *(a ; b)* e la sua derivata, *f''(x)*, positiva in tutti di tale intervallo è possibile applicare alla funzione *f'(x)* il primo teorema di unicità della radice. Esiste quindi uno e un solo punto *c* dell'intervallo *(a ; b)* in cui *f'(c)* = 0 ; inoltre *f'(x)* < 0 per *a < x < c*, *f'(x)* > 0 per *c < x < b*. Il punto *c* è perciò un punto di minimo per *f(x)* nell'intervallo *[a ; b]*.

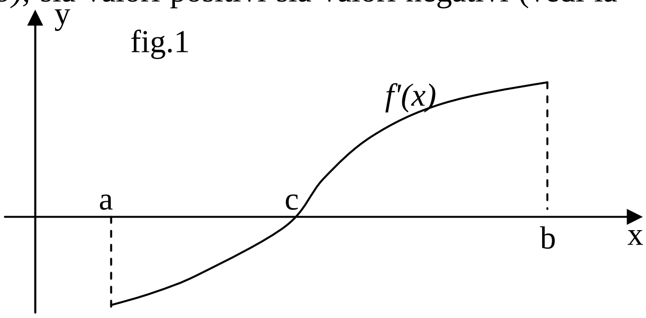


fig.1

Consideriamo i due casi possibili:

(b1) Se risulta *f(a)* > 0 e *f(b)* < 0 (vedi fig.2), essendo *c* il punto di minimo per *f(x)* in *[a; b]* sarà *f(c) <f(b) < 0*. Considerando l'intervallo *[a ; c]*, in cui è *f'(x)* < 0 (vedi fig.2), si può applicare a tale intervallo il primo teorema di unicità della radice e concludere che in *(a ; c)* l'equazione *f(x)=0* ha una ed una sola soluzione; nell'intervallo *(c ; b) f(x)* non si può annullare, perché cresce dal valore *f (d) < 0* al valore *f (b) < 0.*

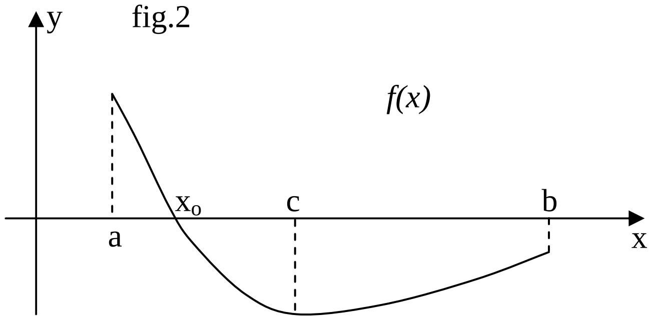


fig.2

(b2) Se risulta *f(a)* < 0 e *f(b)* > 0 (vedi fig.3), essendo *c* il punto di minimo per *f(x)* in *[a; b]* sarà *f(c) <f(a) < 0*. Considerando l'intervallo *[c ; b]*, in cui è *f'(x)* > 0 (vedi fig.3), si può applicare a tale intervallo il primo teorema di unicità della radice e concludere che in *(c ; b)* l'equazione *f(x)=0* ha una ed una sola soluzione; nell'intervallo *(a ; c) f(x)* non si può annullare, perché decresce dal valore *f (a) < 0* al valore *f (c) < 0.*

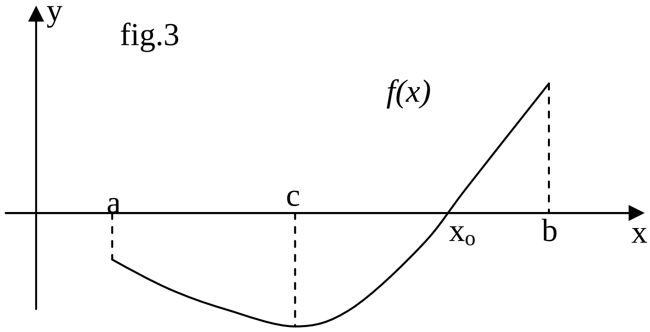


fig.3

Osservazione.

Nei casi in cui si cercano gli zeri di funzioni si usano prevalentemente il primo e secondo teorema, ma talvolta è opportuno fare riferimento al terzo: perché?

Vediamo meglio.

Quando si applica il metodo di Newton è sempre opportuno, per scegliere l'intervallo, realizzare un grafico curato (almeno nell'intervallo scelto!!). Si controlla velocemente se nell'intervallo scelto valgono le ipotesi del primo e secondo teorema e si stabilisce se esiste una e una sola soluzione oppure no. Nel caso in cui ad esempio la derivata prima nell'intervallo scelto non sia sempre positiva o negativa, è possibile in modo agevole (almeno per la tipologia di funzioni di quinta liceo) restringere l'intervallo considerato in modo tale che nel nuovo intervallo la derivata prima sia solo positiva o solo negativa. In questo modo abbiamo selezionato un intervallo in cui valgono le ipotesi del secondo teorema.

A questo punto però è opportuno considerare il seguente esempio.

2 Vogliamo determinare la radice di un'equazione $f(x) = 0$ in un intervallo $(a\ ;\ b)$ in cui la derivata seconda $f''(x)$ non ha segno costante. Che cosa può succedere se cerchiamo di applicare il metodo delle tangenti? Consideriamo il seguente esempio.
Sia

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 2 = 0 \tag{3}$$

l'equazione da risolvere, sapendo che una sua soluzione è contenuta nell'intervallo $(1\ ;\ 3)$. Verifichiamo innanzitutto che nell'intervallo indicato è contenuta una radice di tale equazione.
Posto

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 2,$$

si ha

$$f(1) = 4, \ f(3) = -4$$

e $f(x)$ è continua; dunque per il teorema di esistenza (n. 1), nell'intervallo $(1;\ 3)$ è contenuta almeno una soluzione della (3). Inoltre è

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 7$$

e, come si può facilmente verificare, risulta $f'(x) > 0$ nell'intervallo $(1;\ 3)$. Pertanto, per il primo teorema di unicità (n. 2), in tale intervallo è contenuta una sola soluzione.
Si ha

$$f''(x) = 6x - 12$$

e perciò $f''(x)$ risulta negativa per $x < 2$ e positiva per $x > 2$. In altre parole $f''(x)$ non ha segno costante nell'intervallo $(1\ ;\ 3)$. Cerchiamo di applicare ugualmente il metodo di Newton.
Posto $x_0 = 3$, calcoliamo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)}.$$

È $f(3) = -4;\ f'(3) = -2$ e quindi

$$x_1 = 3 - \frac{-4}{-2} \longrightarrow x_1 = 1.$$

Calcoliamo ora x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}.$$

Essendo $f(1) = 4;\ f'(1) = -2$ si ha

$$x_2 = 1 - \frac{4}{-2} \longrightarrow x_2 = 3.$$

Continuando si ha

$$x_3 = 1;\ x_4 = 3;\ x_5 = 1;\ x_6 = 3;\ \text{ecc.}$$

Si vede così che, in questo caso, la successione $\{x_n\}$, non è convergente.

Osservazione. La condizione che $f''(x)$ sia di segno costante nell'intervallo considerato è sufficiente, ma non necessaria affinché la successione $\{x_n\}$, ottenuta con il metodo di Newton, converga alla soluzione dell'equazione. Se tale condizione non è soddisfatta, la successione $\{x_n\}$ può divergere, può non convergere, può convergere a una soluzione dell'equazione non contenuta nell'intervallo considerato, ma può anche convergere alla soluzione cercata.

In tale esempio si mostra che talvolta, pur essendo verificate le ipotesi del secondo teorema nell'intervallo scelto, l'applicazione del metodo di Newton produce una successione di valori non convergente!!
Serve allora una condizione **sufficiente** che garantisca la convergenza del metodo di Newton.
È a questo punto che entra in scena la derivata seconda!
Infatti se nell'intervallo considerato la derivata seconda ha segno costante, cioè è sempre positiva o sempre negativa, questa è proprio **una condizione sufficiente per la convergenza del metodo di Newton!**
Pertanto quando all'inizio si seleziona l'intervallo in cui applicare il metodo di Newton è opportuno fare la scelta in modo che **sia la derivata prima**, **che la derivata seconda** siano di segno costante.

In pratica:

- **a)** Se $f''(x) \cdot f(a)<0$ il metodo di Newton si applica a partire da $x_o=b$;
- **b)** Se $f''(x) \cdot f(a)>0$ il metodo di Newton si applica a partire da $x_o=a$.

È comoda anche la seguente regola pratica:

"si applica il metodo di Newton a partire dall'estremo in cui la funzione ha lo stesso segno della derivata seconda"