Esercizio n. 85

http://www.extrabyte.info

Un cane di massa $M_1 = 10\,\mathrm{kg}$ si trova su un carrello di massa complessiva $M_2 = 10\,\mathrm{kg}$.

Il carrello è costituito da un telaio di massa $M = 6\,\mathrm{kg}$ e da 4 ruote a forma di disco omogeneo, ciascuna di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$.

Il carrello si trova su un piano in prossimità di una salita. Ad un certo momento il cane spicca un balzo in una direzione che forma un angolo $\theta = 30°$ con l'orrizontale, con velocità $v = 20\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$.

Il carrello si muove quindi in modo che le sue ruote rotolino senza strisciare.

Determinare:

a) la velocità del carrello subito dopo che il cane è saltato;

b) l'altezza massima h raggiunta dal baricentro del carrello nel tratto in salita.

Soluzione

Il fatto che il carrello si muova in modo che le ruote rotolino senza strisciare implica la presenza di attrito radente durante il salto.

Per il sistema carrello+cane la I eq. cardinale si scrive perciò nella forma:

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_a, \tag{1}$$

essendo F_a la forza di attrito radente.

Indicando con Δt il tempo in cui avviene il salto l'integrale della (1) dà:

$$Q_x = M_1 v \cos\theta - M_2 v_2 = \int_0^{\Delta t} F_a dt \tag{2}$$

dove $M_1 v \cos\theta$ e $M_2 v_2$ sono rispettivamente le quantità di moto del cane e del carrello subito dopo il salto.

Per quanto riguarda il momento della quantità di moto acquistato dal carrello esso è dovuto solo alla rotazione delle ruote attorno al loro asse.

Rispetto a questo asse l'unico momento delle forze esterne è quello delle forze di attrito e la II eq. cardinale si scrive:

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_z = \left(\mathbf{F}_a \wedge \mathbf{R}\right)_a = F_a R, \tag{3}$$

essendo R il raggio della ruota. Integrando la (3) sull'intervallo Δt:

$$P_z = 4I\omega = 4I\frac{v_2}{R} = R\int_0^{\Delta t} F_a dt, \tag{4}$$

dove si è tenuto conto che la condizione di rotolamento senza strisciare impone $\omega = \frac{v_2}{R}$ e si è indicato con $I = \frac{mR^2}{2}$ il momento di inerzia di ciascuna ruota.

Elimando il termine $\int_0^{\Delta t} F_a dt$ fra le equazione (2) e (4) si ottiene:

$$M_1 v\cos\theta - M_2 v_2 = 4I\frac{v_2}{R}, \tag{5}$$

e quindi:

$$v_2 = \frac{M_1 v\cos\theta}{2m + M_2} = 14.4\,\mathrm{m\,/\,s} \tag{6}$$

L'altezza massima h raggiunta dal baricentro del carrello si ottiene dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}M_2 v_2^2 + 4I\frac{v_2^2}{R^2} = M_2 g h \tag{7}$$

dove i termini $\frac{1}{2}M_2 v_2^2$ e $4I\frac{v_2^2}{R^2}$ rappresentano rispettivamente l'energia cinetica di traslazione di tutto il carrello (ruote comprese) e l'energia cinetica di rotazione delle ruote. Ricavando h dalla (7) si ottiene $h = 12.7\,\mathrm{m}$