

Nozioni di Geometria Differenziale

Geometria delle curve
Geometria locale delle superfici
Geometria intrinseca delle superfici
Parallelismo superficiale e geodetiche

Daniele Ghisi,
dalle lezioni del prof. F. Magri

Parte I
Geometria delle curve

Capitolo 1

Curve nel piano

1.1 Definizione e primi esempi

Nel piano \mathbb{E}^2 , vi sono diversi modi di definire una curva¹:

- come traiettoria di un punto mobile (**curva parametrizzata**);
- come luogo dei punti che godono di una certa proprietà (**curva data per equazione**).

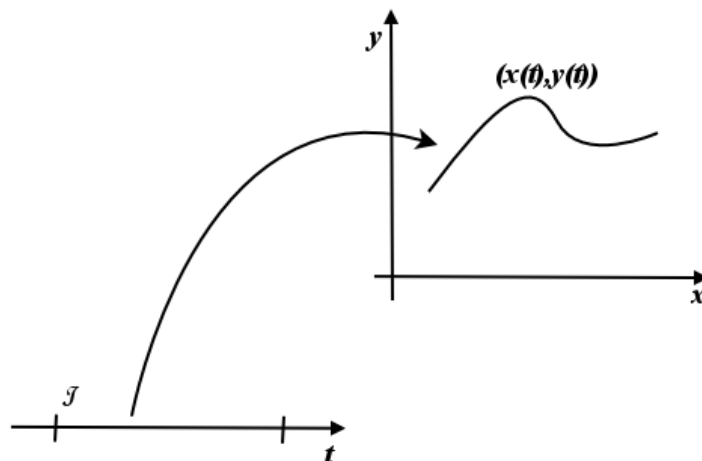


Figura 1.1: Curva

¹Con \mathbb{E}^2 si intende il piano euclideo. Al di là delle evidenti analogie, si può notare una sottile differenza tra \mathbb{R}^2 ed \mathbb{E}^2 : mentre il primo spazio è formato da coppie ordinate di numeri, il secondo è formato da punti

1.1.1 Curve parametrizzate

Le curve di cui ci occuperemo saranno in massima parte curve parametrizzate, ossia (fig. 1.1) sarà data una funzione $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ che sia per lo meno continua. α è differenziabile, cioè se le componenti $x(t)$ e $y(t)$ sono di classe \mathcal{C}^1 .

Per tali curve è definita una velocità $\vec{v} = \dot{P}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$, dove $P(t) = (x(t), y(t))$ è il generico punto che si muove sulla curva α al variare di t . Diremo che la curva sarà regolare se la velocità esisterà non nulla in ogni punto, ovvero se $\vec{v} \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Per quale ragione desideriamo richiedere che la curva sia regolare? Da un lato perché vogliamo che almeno localmente (nell'intorno di ogni punto) esista una corrispondenza biunivoca tra i punti della curva e l'intervallo I dell'asse reale; dall'altro perché vogliamo poter definire la retta tangente (ossia la retta individuata dal vettore velocità).

Tale retta tangente è definita dall'equazione vettoriale:

$$Q = P(t_0) + \lambda \vec{v} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

o anche, in componenti:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \dot{x}(t_0) \\ y = y_0 + \lambda \dot{y}(t_0) \end{cases} \quad (1.1)$$

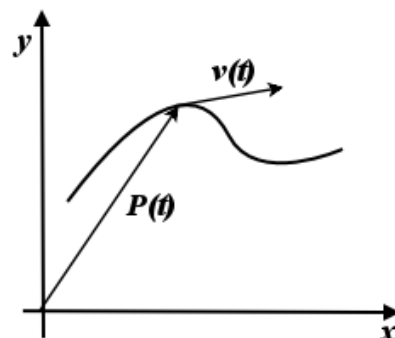
A patto dunque che $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, la retta è definita, non degenera, per ogni punto (x_0, y_0) della curva. Si dimostra che la retta tangente in un punto P_0 , così come noi l'abbiamo definita, è il limite delle rette secanti passanti per P_0 e un altro punto R , al tendere di $R \rightarrow P_0$.

1.1.2 Curve date per equazione

Una curva γ data per equazione è il luogo delle coppie ordinate (x, y) che verificano una condizione del seguente tipo:

$$(x, y) \in \gamma \Leftrightarrow F(x, y) = 0$$

- Se $F(x, y)$ è un polinomio la curva si dice **algebraica**.



- Se $F \in C^1$ (ossia con derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ continue) la curva si dice **differenziabile**.
- Infine se le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ non sono mai contemporaneamente nulle in alcun punto di γ la curva si dice **regolare**.

Questo discorso può essere esteso facilmente a curve in uno spazio n -dimensionale, a patto di avere $n - 1$ equazioni del tipo

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

In questo caso si può esprimere la condizione di regolarità come una condizione sul rango della matrice jacobiana associata al sistema di equazioni. La matrice assume la forma:

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

e, per avere regolarità si impone che il rango di tale matrice sia massimo per ogni scelta di (x_1, x_2, \dots, x_n) , ovvero

$$\text{rg}J = n - 1$$

Si noti che in due dimensioni $J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix}$ e la condizione sul rango equivale alla condizione sul non annullamento simultaneo delle due derivate parziali.

La tangente a una curva regolare data per equazione risulta dunque essere il luogo dei vettori (u, v) uscenti da P che verificano l'equazione lineare

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)v = 0 \quad (1.2)$$

Per quale ragione tale definizione di retta tangente è una buona definizione? Una giustificazione euristica può essere la seguente: il gradiente di una funzione è ortogonale alle sue linee di livello, dunque la retta ortogonale al gradiente è la retta tangente alle linee di livello. Imponendo l'ortogonalità tra gradiente $\text{grad}F(x_0, y_0)$ e il generico vettore (u, v) si trova facilmente l'equazione (1.2).

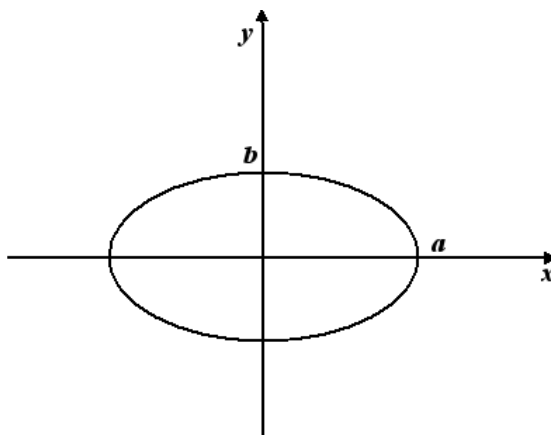


Figura 1.2: L'ellissi

Esempio: l'ellissi. Definita per equazione risulta essere:

$$\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.3)$$

Dall'equazione (1.2) ricaviamo agevolmente la formula per trovare la retta tangente in un punto $P(x_0, y_0)$ appartenente all'ellissi. Il generico vettore (u, v) spiccato da P sar\`a $(x - x_0, y - y_0)$, da cui la tangente risulta essere

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

$$\frac{2xx_0}{a^2} - \frac{2x_0^2}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} - \frac{2y_0^2}{b^2} = 0$$

E ricordandoci che il punto (x_0, y_0) deve appartenere all'ellisse, dunque verificare l'equazione (1.3), si ha:

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} - 2 = 0$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (1.4)$$

Procedendo invece a partire dall'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad (1.5)$$

otteniamo, ricordandoci del sistema (1.1), l'equazione parametrica della tangente alla curva

$$\begin{cases} x = x_0 - a\lambda \sin \varphi \\ y = y_0 + b\lambda \cos \varphi \end{cases} \quad (1.6)$$

Sostituendo i valori di x e y trovati nel sistema (1.6) nell'equazione (1.4), e ricordandoci nuovamente che $(x_0, y_0) \in \gamma$ si giunge immediatamente ad un'identità: abbiamo così verificato in un caso pratico la compatibilità delle due definizioni apparentemente diverse di retta tangente.

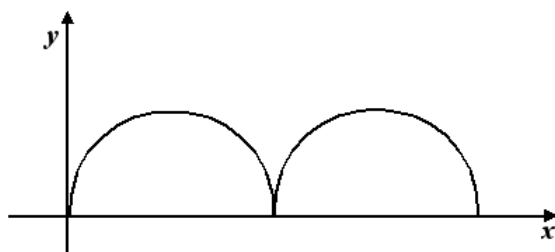
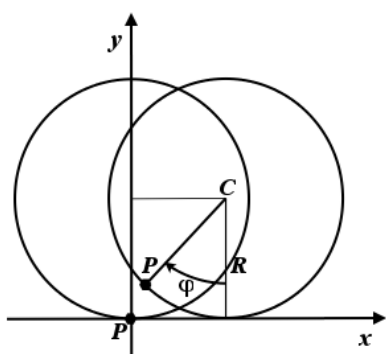


Figura 1.3: La cicloide

Esempio: la cicloide. La cicloide è la traiettoria descritta da un punto situato su una ruota che rotola senza strisciare su una guida rettilinea. Affinché non si abbia striscio, deve succedere che il cammino percorso sulla guida rettilinea deve essere uguale all'arco svolto sulla ruota.

Per tradurre questa condizione in equazioni parametriche della curva, introduciamo il parametro φ che individua l'angolo svolto dalla ruota.



Supponiamo di avere la nostra ruota ferma, e chiamiamo P il punto di contatto della ruota con il terreno. Vogliamo seguire la traiettoria di P durante il rotolamento della ruota. Dette (x, y) le coordinate P a un istante generico, dette (x_c, y_c) le coordinate del centro della ruota a un istante generico, detto R il raggio della ruota, si ha che:

$$y_c = R = y - R \cos \varphi$$

$$x_c = x + R \sin \varphi$$

Da queste, ricordandoci che per la condizione di non strisciamento il cammino orizzontale deve essere uguale all'arco svolto (ovvero: $x_c = R\varphi$), ricaviamo immediatamente le equazioni parametriche della cicloide:

$$\begin{cases} x = R\varphi - R \sin \varphi \\ y = R + R \cos \varphi \end{cases} \quad (1.7)$$

Esempio: la tautocrona. Consideriamo la cicloide rovesciata e pensiamola come guida liscia e fissa lungo cui si muove un punto materiale sotto l'azione della forza peso. Le equazioni parametriche della tautocrona sono:

$$\begin{cases} x = R\varphi - R \sin \varphi \\ y = -R - R \cos \varphi \end{cases} \quad (1.8)$$

Possiamo dimostrare che (proprietà interessante) il periodo delle oscillazioni del punto materiale sulla tautocrona non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni (senza alcun bisogno che questa ampiezza sia piccola, come accadeva per il pendolo semplice).

Proposizione 1.1. *Il periodo di oscillazione T di un punto materiale non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione.*

Dimostrazione. Supponiamo che il punto materiale parta da $P_0(x_0, y_0)$. Per la legge di conservazione dell'energia si ha $v^2 = 2gh = 2g(y_0 - y)$. Inoltre:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) d\varphi^2$$

denotando con il punto la derivata rispetto al parametro φ (che funge da parametro tempo: si può identificare $\varphi = t$). E dalla legge del moto:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} d\varphi$$

Dunque il tempo impiegato per passare da P_0 al punto M (minimo della curva) è pari a

$$T_0 = \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} d\varphi$$

Ma $y_0 - y = -R + R \cos \varphi_0 - (-R + R \cos \varphi) = R(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$. Inoltre, derivando rispetto al tempo le equazioni (1.8) ricaviamo:

$$\begin{cases} \dot{x} = R(1 - \cos \varphi) \\ \dot{y} = -R \sin \varphi \end{cases}$$

Da cui:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2(1 - \cos \varphi)^2 + R^2(\sin \varphi)^2 = 2R^2(1 - \cos \varphi)$$

E dunque:

$$T_0 = \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sqrt{2R^2(1 - \cos \varphi)}}{\sqrt{2gR(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}} d\varphi = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos \varphi}}{\sqrt{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}} d\varphi =$$

E, con un po' di trigonometria²:

$$T_0 = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_{\varphi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2(\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2})}} d\varphi$$

E notando che per $\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi$ $\sin \frac{\varphi}{2}$ è positivo:

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_{\pi}^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= 2\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \int_{\pi}^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}\right)^2}} d\left(\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}\right) = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \left[\arcsin \left(\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}\right)\right]_{\pi}^{\varphi_0} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \end{aligned}$$

Il periodo è

$$T = 4T_0 = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

e dunque si nota la completa indipendenza da φ_0 (ossia dall'ampiezza). \square

Esempio: ponte sospeso. Supponiamo di avere un ponte sospeso tra due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Proposizione 1.2. *La curva di equilibrio è una parabola*

Dimostrazione. Tagliamo la fune in un punto intermedio $P(x, y)$ e consideriamo solo la parte sinistra; possiamo supporre di sostituire la parte eliminata con la tensione \vec{T}_P che essa esercita. Se la fune è flessibile, questa forza deve essere diretta lungo la tangente, così come lungo la tangente è diretta la tensione T_A nel punto A . Inoltre la porzione di ponte considerata sopporta

²Per il numeratore: $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi$ da cui, considerando $\frac{\varphi}{2}$ in luogo di φ , si ha: $1 - \cos \varphi = 2\sin^2 \frac{\varphi}{2}$. Ma è anche vero che $\cos 2\varphi = 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1$, e dunque il denominatore diviene: $\cos \varphi_0 - \cos \varphi = 2\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - 1 - 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} + 1 = 2(\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2})$.

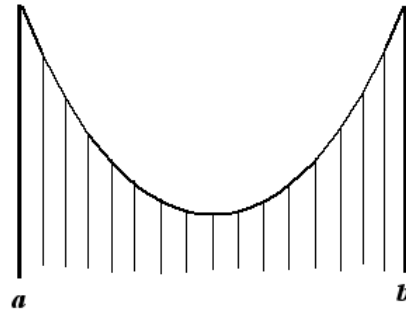


Figura 1.4: Il ponte sospeso

un carico pari a $px(s) = p(x - x_0)$ diretto come la verticale discendente. Possiamo ora scrivere la condizione di equilibrio $\sum F = 0$ componente per componente:

$$\begin{cases} -T_{Ax} + T_x = 0 \\ -T_{Ay} + T_y - px(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_x = a \\ T_y = px(s) + b \end{cases} \quad (1.9)$$

con (a, b) componenti di T_A da determinare imponendo la condizione che la fune passi per le estremità fissate. Per legare la tensione alla forma della fune facciamo uso della condizione di tangenza (la tensione era sempre diretta come la tangente). Dunque

$$y'(x) = \frac{T_y}{T_x} = \frac{px(s)}{a} + \frac{b}{a}$$

E, integrando in x (in seguito a un cambio di variabile da s a $x(s)$):

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{p}{a} x^2 + \frac{b}{a} x + c$$

che è palesemente una parabola, con (a, b, c) da determinare mediante le seguenti condizioni (detta l la lunghezza della fune):

$$\begin{cases} y(x_A) = h \\ y(x_B) = h \\ \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 - y'(x)^2} dx = l \end{cases}$$

□

1.2 Lunghezza di una curva

Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ una curva regolare. Possiamo scrivere, per componenti sui vettori cartesiani:

$$P(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dP(t)}{dt} = \dot{P}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

Definizione 1.1. Si definisce **lunghezza** della curva α per $t \in [t_0, t_1]$:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Nel caso di curve date in rappresentazione cartesiana si ha:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dx} \dot{x} = \frac{dy}{dx} = y'(x) \end{cases} \quad (1.10)$$

e dunque

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Questa formula traduce il Teorema di Pitagora:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + y'(x)^2 dx^2 = dx^2(1 + y'(x)^2)$$

Introduciamo il concetto di cambio di parametrizzazione di una curva.

Definizione 1.2. Si definisce **cambio di parametrizzazione** di una curva γ un'applicazione $h : J \rightarrow I$ con $h(\tau) \in C^1(J)$, $h'(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in J$.

La funzione h è monotona crescente, dunque invertibile. Sostanzialmente, associando a t il tempo in un sistema fisico, due parametrizzazioni diverse di una curva indicano che la stessa curva viene percorsa con velocità diverse.

Teorema 1.3. La nozione di lunghezza è una grandezza geometrica, ossia non dipende dalla parametrizzazione della curva.

Dimostrazione. In altri termini, dobbiamo dimostrare che la lunghezza è una proprietà della curva e non varia al variare della parametrizzazione usata per descrivere la curva. Dobbiamo, insomma, mostrare che:

$$l_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\vec{v}_\alpha(t) \cdot \vec{v}_\alpha(t)} dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\vec{v}_\beta(\tau) \cdot \vec{v}_\beta(\tau)} d\tau = l_\beta \quad (1.11)$$

Per il Teorema di derivazione di funzioni composte, se $\beta(\tau)=\alpha(h(\tau))$ allora $\vec{v}_\beta(\tau) = \frac{d\beta}{d\tau} = \vec{v}_\alpha(t) \frac{dh}{d\tau}$. Ossia, $\frac{dh}{d\tau}$ è il coefficiente che amplifica la velocità nelle due diverse parametrizzazioni. Ora basta sostituire quanto trovato all'interno della (1.11) e si trova, con un cambiamento di variabile nell'integrale ($t = h(\tau) \Rightarrow dt = \frac{dh}{d\tau} d\tau$):

$$l_\beta = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\vec{v}_\alpha(h(\tau)) \cdot \vec{v}_\alpha(h(\tau))} \cdot \frac{dh}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\vec{v}_\alpha(t) \cdot \vec{v}_\alpha(t)} dt$$

□

1.2.1 Parametro arco

Definizione 1.3. Si definisce **funzione arco** la seguente funzione integrale:

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(\xi) d\xi$$

Poiché, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $\frac{ds}{dt} = v(t) > 0$, la relazione tra s e t risulta sempre biunivoca e invertibile. Dunque possiamo scegliere di usare l'arco s come parametro della curva. La funzione $P(s)$ (ossia la curva avente come parametro l'arco) si dice **parametrizzazione naturale** della curva, e gode della seguente importante proprietà:

Teorema 1.4. La velocità rispetto alla parametrizzazione naturale è unitaria.

Dimostrazione. Infatti

$$\vec{v}(s) = \frac{dP}{ds} = \frac{d}{ds} P(t(s)) = \vec{v}(t) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}(t)}{v}$$

E dunque $v(s) = |\vec{v}(s)| = \left| \frac{\vec{v}(t)}{v} \right| = 1$. □

1.3 Curvatura

Immaginiamo di traslare nell'origine il versore tangente ad un generico punto della curva. Al variare del punto sulla curva otterremo la rappresentazione circolare della curva. Chiamiamo dunque **funzione angolo** $\theta(s)$ l'angolo che il versore tangente alla curva $\vec{v}(s)$ forma con una direzione fissata, supponiamo per comodità l'asse delle ascisse³.

³Tale scelta è del tutto arbitraria, ma comoda, per poter scrivere successivamente le equazioni di P' e P'' rispetto alla base ortonormata $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tuttavia, nella definizione di curvatura l'angolo θ può essere definito a meno di una costante additiva, la cui derivata per il parametro arco è ovviamente nulla.

Definizione 1.4. Si chiama **curvatura** (con segno) la derivata della funzione angolo rispetto al parametro arco, ovvero:

$$k(s) = \frac{d\theta}{ds}$$

La curvatura $k(s)$ dà la misura della velocità con cui ruota il versore tangente alla curva, una volta trasportato nell'origine degli assi (ossia sul cerchio unitario). La curvatura è altresì dotata di segno, che cambia al cambiare dell'orientazione della curva.

1.3.1 Calcolo di k con la parametrizzazione naturale

Troviamo innanzitutto il versore tangente, ricordandoci che θ è l'angolo formato dal versore tangente alla curva con l'asse delle ascisse⁴:

$$P'(s) = \cos \theta(s) \vec{i} + \sin \theta(s) \vec{j} = \vec{v}_1 \quad (1.12)$$

E derivando nuovamente:

$$P''(s) = (-\sin \theta(s) \vec{i} + \cos \theta(s) \vec{j}) \frac{d\theta}{ds} = \vec{v}_2 k \quad (1.13)$$

Notiamo subito l'ortonormalità di \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , in particolare $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{i} \wedge \vec{j}$. Dunque

$$|P'(s) \wedge P''(s)| = |\vec{v}_1 \wedge k \vec{v}_2| = k |\vec{i} \wedge \vec{j}| = k$$

D'altro canto, sviluppando il primo prodotto vettoriale:

$$P'(s) \wedge P''(s) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(s) & y'(s) & 0 \\ x''(s) & y''(s) & 0 \end{pmatrix} = (x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s))(\vec{i} \wedge \vec{j})$$

E dato che k deve essere il modulo di tale prodotto vettoriale, deve essere:

$$k = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix} = (x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)) \quad (1.14)$$

⁴Per comodità di lettura le derivate rispetto al parametro arco saranno indicate con gli apici ($P'(s)$), mentre le derivate rispetto a un generico parametro t saranno indicate con i punti ($\dot{P}(t)$)

1.3.2 Calcolo di k con parametrizzazione arbitraria

Cambiando parametrizzazione (derivazione di funzione composta) si ha:

$$\dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \frac{ds}{dt} = P'(s) \frac{ds}{dt}$$

Derivando il prodotto (regola di Leibniz):

$$\ddot{P}(t) = P''(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + P'(s) \frac{d^2s}{dt^2}$$

Allora:

$$\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t) = P'(s) \wedge P''(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 = kv^3 (\vec{i} \wedge \vec{j})$$

Ne segue che

$$k = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{v^3} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (1.15)$$

Esempio: circonferenza. Consideriamo una circonferenza di raggio R . Data la perpendicolarità tra vettore tangente alla circonferenza e raggio, se φ l'angolo descritto dal raggio sulla circonferenza, θ risulta essere pari a $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Il parametro arco è $s = R\varphi$, dunque si ha abbastanza immediatamente che $\theta(s) = \frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}$.

Calcoliamo ora la curvatura (con segno):

$$k := \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$$

La curvatura è dunque costante, e pari al reciproco del raggio (ossia ha una dipendenza inversa dal raggio). La proprietà di avere curvatura costante caratterizza completamente la circonferenza tra le curve del piano: si può dimostrare che ogni curva piana con curvatura costante $k(s) = c \neq 0$ è un arco di circonferenza.

Possiamo ottenere lo stesso risultato in maniera più meccanica e meno intuitiva, utilizzando φ al posto del parametro arco, ossia servendoci delle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -R \sin \varphi \\ \dot{y} = R \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -R \cos \varphi \\ \ddot{y} = -R \sin \varphi \end{cases}$$

Dalle derivate prime abbiamo che $v = R$, e dunque abbiamo una conferma che il parametro arco (a meno di una costante additiva) vale

$$s = \int_0^\varphi v \, du = R\varphi$$

La circonferenza parametrizzata con il parametro arco (ossia sostituendo a φ il suo corrispettivo s/R) diventa:

$$\begin{cases} x = R \cos \frac{s}{R} \\ y = R \sin \frac{s}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\sin \frac{s}{R} \\ \dot{y} = \cos \frac{s}{R} \end{cases}$$

e la velocità risulta, correttamente, unitaria. Inoltre, grazie all'equazione (1.15), ritroviamo:

$$k = \frac{(-R \sin \varphi)(-R \sin \varphi) - (-R \cos \varphi)(R \cos \varphi)}{(R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R}$$

Esempio: parabola. Consideriamone le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = pt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2pt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 2p \end{cases}$$

Dall'equazione (1.15), ricaviamo:

$$k = \frac{2p - 0}{(1 + 4p^2t^2)^{3/2}} = \frac{2p}{(1 + 4p^2t^2)\sqrt{1 + 4p^2t^2}}$$

In particolare, nell'origine (per $t = x = 0$), la curvatura vale $k = 2p$.

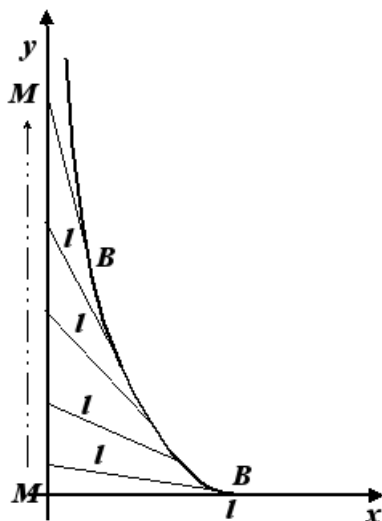
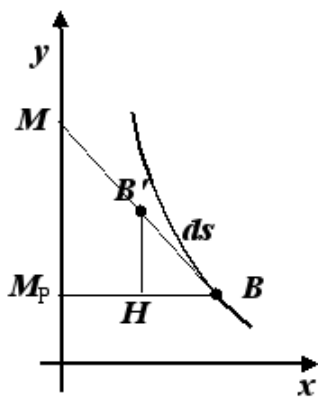


Figura 1.5: La trattrice

Esempio: trattrice. La trattrice, introdotta da Leibniz nel 1693, è la soluzione a un tipico problema di inseguimento: essa descrive la traiettoria percorsa da una barca B trainata mediante una fune da un marinaio M che si muove lungo la riva, supposta rettilinea.

Supponiamo che la riva sia l'asse y e che il marinaio si muova nel verso crescente dell'asse; supponiamo anche che all'istante iniziale il marinaio si trovi nell'origine $(M_0(0,0))$ e la fune, di lunghezza l , sia perpendicolare all'asse y (ovvero sia diretta lungo l'asse x), e dunque la barca si trovi nel punto $B_0(l,0)$. Ci chiediamo: all'avanzare del marinaio sulla riva, quale sarà la curva descritta dalla barca?

Per giungere alla soluzione dobbiamo imporre la seguente condizione sul moto della barca (che si traduce in un'equazione differenziale): la barca è trainata dalla fune, dunque la velocità della barca deve essere in ogni punto diretta come la fune. O ancora: la fune, in ogni posizione, è tangente alla traiettoria. Dunque la curva trattrice α è caratterizzata dalla seguente proprietà: tracciando la tangente alla curva in un punto, la distanza tra il punto di tangenza e il punto di intersezione della tangente con l'asse y (la riva) è sempre l . Si tratta di una condizione sulla tangente che verrà tradotta, quindi, da un'equazione differenziale del tipo: $f(x, y, y') = 0$.



Prendiamo uno spostamento infinitesimale da B a B' della barca, e consideriamo il tratto di curva $\overline{BB'}$ risultante: esso può essere approssimato con il segmento $\overline{BB'}$, di lunghezza ds . Per spostamenti infinitesimali i tre punti B , B' e M risultano essere allineati. Tracciamo dunque la parallela da B all'asse delle x . Essa incontra l'asse y in un punto M_P , inoltre chiamiamo H la proiezione di B' su tale retta. Dalla similitudine dei triangoli $\triangle BB'H$ e $\triangle BMM_P$, deduciamo che:

$$\frac{ds}{l} = \frac{dy}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{-dx}{x}$$

dove il meno davanti a dx tiene conto che per dy crescente dx decresce (dunque con $dy > 0$ si ha $dx < 0$). Dalla seconda uguaglianza si ha che:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}$$

che è un'equazione differenziale a variabili separabili che possiamo integrare

tra l'istante iniziale ($x = l, y = 0$) e il generico istante:

$$\int_0^y dy = - \int_l^x \frac{\sqrt{l^2 - u^2}}{u} du$$

L'integrale $y = - \int_l^x \frac{\sqrt{l^2 - u^2}}{u} du$ ci fornisce dunque l'equazione cartesiana della trattrice.

1.4 Formule di Frenet

Le **formule di Frenet** forniscono un altro significato geometrico della curvatura⁵ con segno k . La nostra idea è di associare a ogni punto $P(s)$ della curva una base (\vec{v}_1, \vec{v}_2) ortonormata (ossia $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ e $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1$) e orientata allo stesso modo della base fissa (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , cioè $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$. Scegliamo come vettore \vec{v}_1 il vettore velocità⁶, che è sempre tangente alla curva e orientato lungo il verso positivo della curva. Il vettore \vec{v}_2 sarà dunque perpendicolare a \vec{v}_1 e univocamente definito dalla condizione $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$.

Teorema 1.5 (Frenet). *Al muoversi di P sulla curva α , la base ortonormata di Frenet ruota con velocità angolare (per unità di arco) pari a k . In particolare:*

$$\frac{d\vec{v}_1}{ds} = k\vec{v}_2 \quad \frac{d\vec{v}_2}{ds} = -k\vec{v}_1 \quad (1.16)$$

o, in altri termini,

$$\frac{d\vec{v}_j}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_j \quad (1.17)$$

con $j \in \{1, 2\}$ e con $\vec{\omega} = k\vec{e}_3$ detto **vettore di Darboux**.

Prima di dimostrare il teorema, procediamo a verificare la compatibilità delle formule (1.16) e (1.17). Si ha immediatamente che:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_1 = k\vec{e}_3 \wedge \vec{v}_1 = k\vec{v}_2$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_2 = k\vec{e}_3 \wedge \vec{v}_2 = k(-\vec{v}_1) = -k\vec{v}_1$$

e ci siamo: dunque l'equazione (1.17) è del tutto analoga all'equazione (1.16).

Dimostrazione. Ci sono tre idee fondamentali nelle formule di Frenet.

⁵In questo paragrafo (e solamente qui), per evitare conflitti di notazioni con la curvatura k , la terna ortonormata di vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 verrà indicata con $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ invece che con $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

⁶Dato che la nostra curva è parametrizzata con parametro arco, tale vettore è unitario.

- La prima idea è di esprimere le derivate dei vettori di una base lungo la base stessa. Infatti, se (\vec{v}_1, \vec{v}_2) sono una base qualsiasi (non necessariamente ortonormale), è sempre possibile scrivere:

$$\frac{d\vec{v}_1}{ds} = A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2$$

$$\frac{d\vec{v}_2}{ds} = C\vec{v}_1 + D\vec{v}_2$$

La matrice $\Omega = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dei coefficienti è detta **matrice di Cartan** della base.

- La seconda idea è che, se la base è ortonormata, la matrice di Cartan è necessariamente antisimmetrica. Infatti:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_1}{ds} \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \frac{d\vec{v}_1}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_1}{ds} \cdot \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow (A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = 0$$

Tale prodotto scalare sarà nullo solo quando i due vettori sono ortogonali, ma l'ortogonalità della base porta subito a dire che il vettore tra parentesi tonde deve avere componente nulla lungo \vec{v}_1 , dunque $A = 0$. Analogamente:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_2}{ds} \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_2}{ds} \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow (C\vec{v}_1 + D\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2 = 0$$

e si deduce immediatamente, come sopra, che $D = 0$.

Infine.

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}_1}{ds} \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{ds} = 0 \Rightarrow (A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2 + (C\vec{v}_1 + D\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = 0$$

Ma sviluppando il prodotto scalare, tenendo conto dell'ortogonalità, A e D scompaiono e, dato che i vettori di base sono vettori a norma unitaria, si ha subito che $C = -B$ da cui $B = -C$. Dunque la matrice di Cartan deve avere necessariamente la forma:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

- La terza idea, caratteristica della teoria delle curve, è il legame tra curvatura k e derivata del versore tangente \vec{v}_1 . Infatti, ricordandoci della funzione angolo, possiamo scrivere le componenti del vettore \vec{v}_1 lungo la base canonica, e poi derivarle rispetto alla funzione arco:

$$\vec{v}_1 = \cos \theta(s) \vec{e}_1 + \sin \theta(s) \vec{e}_2$$

$$\frac{d\vec{v}_1}{ds} = \frac{d\theta}{ds}(-\sin\theta(s))\vec{e}_1 + \frac{d\theta}{ds}(\cos\theta(s))\vec{e}_2 = \frac{d\theta}{ds}[-\sin\theta(s)\vec{e}_1 + \cos\theta(s)\vec{e}_2]$$

Si nota immediatamente che il vettore tra parentesi quadre è un vettore a modulo unitario, ortogonale a \vec{v}_1 e orientato positivamente rispetto a \vec{v}_1 . Dunque, necessariamente tale vettore deve essere \vec{v}_2 . Si ha dunque che:

$$\frac{d\vec{v}_1}{ds} = k\vec{v}_2$$

e ci siamo.

Riassumendo le tre idee:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{v}_1}{ds} \\ \frac{d\vec{v}_2}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

dove la prima uguaglianza vale per ogni scelta di base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, la seconda uguaglianza vale per l'ortonormalità della base di Frenet e la terza uguaglianza vale per la relazione di Frenet. \square

1.5 Teorema fondamentale di Bonnet (caso piano)

L'idea alla base del teorema è che la funzione arco s e la curvatura $k(s)$ sono funzioni caratteristiche della curva piana, nel senso che la definiscono univocamente (a meno di spostamenti rigidi, ovvero spostamenti che conservano la distanza: rotazioni e traslazioni). Enunciamo e dimostriamo il Teorema di Bonnet, che si scinde in due parti: esistenza e unicità.

Teorema 1.6 (Bonnet). *Data una funzione continua $k(s)$ esiste sempre una curva parametrizzata avente s come arco e $k(s)$ come curvatura. Inoltre due curve piane aventi lo stesso arco e la stessa curvatura coincidono a meno di uno spostamento rigido.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto l'esistenza. Dato che $k(s) = \frac{d\theta}{ds}$, data la funzione continua (e quindi integrabile) $k(s)$ si ricava agevolmente

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^s k(u) du \quad (1.19)$$

con θ_0 da determinare mediante la condizione iniziale.

Poi, ricordando che $\theta(s)$ è l'angolo formato dalla tangente alla curva con l'asse delle x , dalla (1.12) abbiamo che

$$\frac{dP(s)}{ds} = \cos\theta(s)\vec{i} + \sin\theta(s)\vec{j} \quad (1.20)$$

Risolvendo ancora una volta questa equazione differenziale a variabili separabili, ricaviamo:

$$P(s) = P_0 + \int_{s_0}^s [\cos \theta(u)\vec{i} + \sin \theta(u)\vec{j}] du$$

Per mostrare che la funzione $P(s)$ così definita è proprio la soluzione del nostro problema, dobbiamo mostrare che:

i.

$$\frac{dP}{ds} \frac{dP}{ds} = 1$$

ossia che s è effettivamente il parametro arco della curva $P(s)$;

ii.

$$\frac{d^2P}{ds^2} = k\vec{v}_2$$

ossia che $k(s)$ è effettivamente la curvatura di $P(s)$.

Le due verifiche sono immediate:

$$\text{i. } \frac{dP}{ds} = \cos \theta(s)\vec{i} + \sin \theta(s)\vec{j} \Rightarrow \frac{dP}{ds} \frac{dP}{ds} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{ii. } \frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dP}{ds} \right) = \frac{d\theta}{ds} [-\sin \theta(s)\vec{i} + \cos \theta(s)\vec{j}] = k\vec{v}_2$$

La curva non è unica dal momento che nei due processi di integrazione compaiono due costanti arbitrarie θ_0 e P_0 . Usando la libertà di ruotare e traslare la curva posso sempre però porre a priori il valore di tali costanti, e fissare $\theta_0 = 0$ con una rotazione e $P_0 = 0$ con una traslazione.

Vediamo tuttavia meglio la dimostrazione dell'unicità (a meno di spostamenti rigidi) di questa curva.

Siano $P_1(s)$ e $P_2(s)$ due curve aventi $k(s)$ come curvatura assegnata, e supponiamo che per $s = s_0$

$$P_1(s_0) = P_2(s_0), \quad \frac{dP_1(s)}{ds}(s_0) = \frac{dP_2(s)}{ds}(s_0)$$

condizioni alle quali posso sempre ricondurmi mediante una traslazione e una rotazione (ossia a uno spostamento rigido). Dobbiamo dimostrare che $P_1(s) = P_2(s)$.

Essendo $k(s) = \frac{d\theta_1(s)}{ds} = \frac{d\theta_2(s)}{ds}$, ne segue che $\theta_1(s) - \theta_2(s) = C$. Dato che per ipotesi $\frac{dP_1(s)}{ds}(s_0) = \frac{dP_2(s)}{ds}(s_0)$, ne consegue immediatamente che $\theta_1(s_0) = \theta_2(s_0)$, e dunque $C = 0$ e $\theta_1(s) = \theta_2(s) \quad \forall s$. Ma allora

$$\frac{dP_1}{ds} = \cos \theta_1(s)\vec{i} + \sin \theta_1(s)\vec{j} = \cos \theta_2(s)\vec{i} + \sin \theta_2(s)\vec{j} = \frac{dP_2}{ds}$$

Da cui ricaviamo che $\frac{dP_1}{ds} = \frac{dP_2}{ds}$, vale a dire $P_1(s) - P_2(s) = \vec{c}$. E dato che per ipotesi si ha che $P_1(s_0) = P_2(s_0)$ ne consegue immediatamente che $\vec{c} = 0$ e che $P_1(s) = P_2(s)$, ossia la tesi. \square

Abbiamo dunque dimostrato che la curvatura è l'unico parametro essenziale della geometria delle curve piane: essa definisce univocamente la curva, e può essere data ad arbitrio.

Capitolo 2

Evoluta, evolvente e involuppo

I termini evoluta, evolvente e involuppo designano tre processi, legati fra loro, che permettono di costruire una nuova curva a partire da una curva data.

2.1 Evoluta ed evolvente

Diamo innanzitutto alcune definizioni:

Definizione 2.1. *Definiamo la normale ad una curva $\alpha(s)$ passante per un suo punto $P(s)$ come la retta perpendicolare alla tangente ad $\alpha(s)$ nel punto $P(s)$.*

Definizione 2.2. *Si definisce **centro di curvatura** di una curva $\alpha(s)$ in un suo punto $P(s)$ il punto $Q(s)$ situato sulla normale ad α in $P(s)$ (più precisamente nel verso del vettore normale \vec{v}_2) e tale che la distanza tra $P(s)$ e $Q(s)$ sia*

$$d(P(s), Q(s)) = \rho(s) := \frac{1}{k(s)}$$

*Inoltre $\rho(s)$ viene detto **raggio di curvatura**.*

Al muoversi di $P(s)$ sulla curva, $Q(s)$ descrive un'altra curva nel piano, tale curva viene chiamata evoluta di $\alpha(s)$. Più precisamente:

Definizione 2.3. *Si definisce **evoluta** di una curva il luogo dei suoi centri di curvatura.*

Definizione 2.4. *Chiamiamo **evolvente** di una curva α una curva $\hat{\alpha}$ che abbia α come evoluta.*

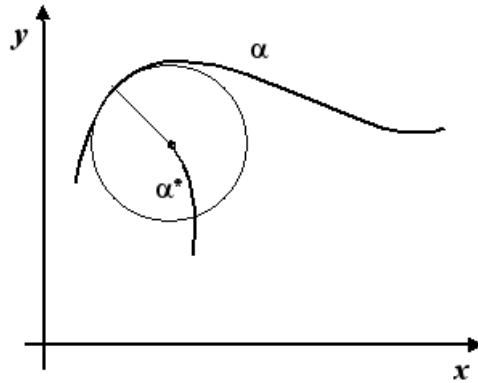


Figura 2.1: Costruzione dell'evolva di una curva

2.1.1 Equazione vettoriale

Cerchiamo ora l'equazione vettoriale dell'evolva, note le equazioni parametriche $x(s)$ e $y(s)$ della curva $\alpha(s)$. Chiamando, al solito, $\vec{v}_1 = \frac{dP}{ds}$ e \vec{v}_2 il versore normale che forma con \vec{v}_1 una base positiva equiorientata con \vec{i} e \vec{j} , si ha che l'equazione vettoriale dell'evolva $\alpha^*(s)$ di una curva $\alpha(s)$ è (detto P^* il punto su β e P il punto su α):

$$P^*(s) = P(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{v}_2 \quad (2.1)$$

Questa è dunque l'equazione parametrica di α^* in funzione del parametro s . Si noti che però tale parametro s che per α era l'arco, per α^* non è più necessariamente il parametro arco.

2.1.2 Proprietà dell'evolva

Studiamo ora la base di Frenet associata all'evolva α^* nel punto $P^*(s^*)$ (con s^* parametro arco di α^*), calcolando il versore tangente e la normale in $P^*(s)$ a α^* .

Per quanto riguarda il versore tangente:

$$\frac{dP^*}{ds^*} = \frac{dP^*}{ds} \frac{ds}{ds^*}$$

Ma $P^*(s) = P(s) + \rho(s)\vec{v}_2(s)$, da cui (ricordandoci che $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$):

$$\frac{dP^*}{ds} = \vec{v}_1 + \frac{d\rho}{ds}\vec{v}_2 + \rho(s)(-k(s)\vec{v}_1) = \frac{d\rho}{ds}\vec{v}_2$$

Dunque abbiamo che:

$$\frac{dP^*}{ds^*} = \frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{ds^*} \vec{v}_2$$

D'altro canto, $\frac{dP^*}{ds^*}$ è la velocità della curva α^* che, dato che è espressa rispetto al parametro arco, deve essere unitaria. Dunque $\|\frac{dP^*}{ds^*}\| = 1$, vale a dire $\frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{ds^*} = 1$, da cui ricaviamo:

$$\frac{dP^*}{ds^*} = \vec{v}_2 \quad (2.2)$$

ovvero che il versore tangente all'evoluta α^* è diretto come la normale alla curva α . Dunque l'evoluta α^* è tangente (in P^*) alla normale passante ad α passante per P . Inoltre, dalla unitarietà del vettore tangente all'evoluta (scritta rispetto al parametro arco) ricaviamo che:

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{ds^*}{ds} \quad (2.3)$$

2.1.3 Equazioni parametriche

Procuriamoci ora, in generale, le equazioni parametriche dell'evoluta di una curva arbitraria $\alpha : x = x(t), y = y(t)$, nell'ipotesi che per $k(t) > 0 \quad \forall t \in I$, con I intervallo su cui concentriamo la nostra attenzione. Se la curvatura, infatti, è sempre positiva, esiste sempre il vettore normale alla curva (precedentemente indicato con \vec{v}_2). Per comodità di notazione, d'ora innanzi chiameremo $\vec{t} := \frac{d\vec{P}}{ds}$ il versore tangente e $\vec{n} := \text{vers}(\frac{d\vec{t}}{ds}) = \frac{d\vec{t}}{ds} / \|\frac{d\vec{t}}{ds}\|$ il versore normale alla curva. Dall'equazione vettoriale (2.1) dell'evoluta sappiamo che:

$$P^*(t) = P(t) + \vec{n} \frac{1}{k(t)}$$

Inoltre dalle equazioni di Frenet sappiamo che:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{k} \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{k} \frac{d^2 P}{ds^2}$$

Abbiamo dunque che:

$$P^*(t) = P(t) + \frac{1}{k^2(t)} \frac{d^2 P}{ds^2} \quad (2.4)$$

Il problema è che in generale non conosciamo la dipendenza di P dalla funzione arco s , ma conosciamo (tramite equazioni parametriche) la dipendenza

da un parametro qualsiasi t . Dobbiamo quindi cambiare parametrizzazione, ricorrendo alla derivazione di funzione composta:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dP}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dP}{dt} \frac{1}{v} \quad (2.5)$$

Generalizzando il risultato ottenuto, si ricava facilmente un'importante relazione tra gli operatori di derivata:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \quad (2.6)$$

Tale formula è assolutamente generale e assai utile - ci ricorda che la velocità (arco per unità di tempo) è il fattore che mette in relazione due parametrizzazioni diverse. Passiamo ora alla derivata seconda:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dP}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{dP}{dt} \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{dP}{dt} \frac{1}{v} \right) = \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{d^2P}{dt^2} + \frac{1}{v} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} \frac{dP}{dt} \right) = \frac{1}{v^3} \left(v \frac{d^2P}{dt^2} - \frac{dv}{dt} \frac{dP}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove la terza uguaglianza vale proprio per l'equazione (2.6). L'equazione (2.7), scomposta nelle coordinate rispetto alla base canonica, diventa:

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{1}{v^3} [v(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) - \frac{dv}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j})] \quad (2.8)$$

con

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (2.9)$$

modulo della velocità, e con

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}) = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (2.10)$$

accelerazione tangenziale. Quindi introducendo le informazioni ricavate dalla (2.9) e dalla (2.10) nell'equazione (2.8) si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{ds^2} &= \frac{1}{v^4} [(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) - (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j})] = \\ &= \frac{1}{v^4} [\vec{i}(\dot{x}^2\ddot{x} + \dot{y}^2\ddot{x} - \dot{x}^2\ddot{x} - \dot{y}\dot{x}\ddot{y}) + \vec{j}(\dot{x}^2\ddot{y} + \dot{y}^2\ddot{y} - \dot{x}\dot{y}\ddot{x} - \dot{y}^2\ddot{y})] = \\ &= \frac{1}{v^4} [(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})\dot{y}\vec{i} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\dot{x}\vec{j}] \end{aligned}$$

E ricordandoci che, per la (1.15), $k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{v^3}$, otteniamo che:

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{v^4}(\dot{x}\vec{j} - \dot{y}\vec{i}) = \frac{k}{v}(\dot{x}\vec{j} - \dot{y}\vec{i}) \quad (2.11)$$

Introducendo ora la (2.11) nella (2.4) abbiamo dunque che¹

$$P^*(t) = P(t) + \frac{1}{k^2(t)} \frac{d^2P}{ds^2} = P(t) + \frac{1}{k^2(t)} \frac{k(t)}{v} (\dot{x}\vec{j} - \dot{y}\vec{i}) = P(t) + \frac{v^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} (\dot{x}\vec{j} - \dot{y}\vec{i}) \quad (2.12)$$

E per finire, separiamo le componenti e calcoliamo le equazioni parametriche dell'evoluta α^* della curva α :

$$\begin{cases} x^*(t) = x(t) - \frac{v^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{y} \\ y^*(t) = y(t) + \frac{v^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{x} \end{cases} \quad (2.13)$$

Esempio: curvatura costante e evoluta. Vogliamo dimostrare che:

Proposizione 2.1. *Una curva α per cui valga $k(s) = \text{cost} \neq 0$ è un arco di circonferenza.*

Dimostrazione. Un possibile modo sarebbe dedurre direttamente la tesi dal Teorema di Bonnet, ma preferiamo in questa sede usare un altro metodo, per verificare, almeno in un caso particolare, suddetto teorema.

Studiamo l'evoluta di questa curva, rispetto a un generico parametro.

$$\frac{dP^*}{ds} = \frac{dP^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds}$$

Dalla (2.3) abbiamo che $\frac{ds^*}{ds} = \frac{d\rho}{ds}$; d'altra parte, però, se k è costante, lo è necessariamente anche $\rho := \frac{1}{k}$. Abbiamo dunque che:

$$\frac{dP^*}{ds} = \frac{d\rho}{ds} \vec{v}_2 = 0$$

La velocità dell'evoluta è nulla: l'evoluta si riduce quindi a un solo punto. Ciò significa che il luogo dei centri di curvatura della curva è formato da un solo punto, attorno a cui la curva ruota con raggio costante - dunque abbiamo un'arco di circonferenza. \square

¹Questo vale nell'ipotesi che $k > 0$, ovvero $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} > 0$, altrimenti bisogna prestare attenzione ad inserire i necessari valori assoluti.

Si noti che, data una curva, mentre la sua evoluta è univocamente determinata, esistono in generale infinite sue evolventi. L'esempio più lampante è forse il seguente: data una circonferenza α , l'evoluta è il suo centro. Tale centro, tuttavia, non è solo l'evoluta di α , ma anche l'evoluta di tutte le infinite circonferenze concentriche ad α . In questo senso la relazione tra evoluta ed evolvente è simile alla relazione tra le operazioni di derivazione e di integrazione.

2.2 Inviluppo

Definizione 2.5. *Data una famiglia di curve piane mediante l'equazione*

$$F(x, y, a) = 0 \quad a \in I \subset \mathbb{R}$$

*si chiama **inviluppo** della famiglia, se esiste, una curva che non appartenga alla famiglia e che sia in ogni suo punto tangente alla curva della famiglia passante per quel punto.*

Da questa definizione ricaviamo subito che l'evoluta di α è l'inviluppo delle sue normali (fig. 2.2).

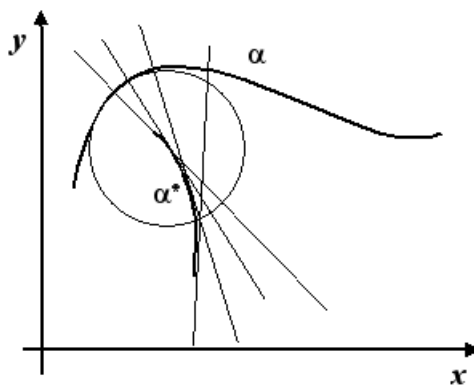


Figura 2.2: L'evoluta come inviluppo delle normali

Studio degli inviluppi

Ora vogliamo trovare le equazioni parametriche $x(a)$, $y(a)$ dell'inviluppo della famiglia di curve descritta dall'equazione

$$F(x, y, a) = 0 \quad a \in I \subset \mathbb{R}$$

usando come parametro per l'inviluppo lo stesso parametro che individua la curva all'interno della famiglia (ci sarà comodo). Abbiamo bisogno di due equazioni, che otteniamo imponendo le due seguenti condizioni:

Punto comune. Il punto $(x(a), y(a))$ dell'inviluppo è in comune con la curva della famiglia, dunque vale

$$F(x(a), y(a), a) = 0 \quad (2.14)$$

Tangente comune. La tangente all'inviluppo è diretta come la tangente alla curva della famiglia.

D'altro canto la tangente all'inviluppo è diretta come la velocità di percorrenza dell'inviluppo, ovvero come il vettore di componenti $(\dot{x}(a), \dot{y}(a))$, dove le derivate si intendono calcolate rispetto ad a .

Invece, la tangente (\vec{v}_x, \vec{v}_y) nel punto $(x(a), y(a))$ alla curva della famiglia individuata da a , è normale al gradiente della funzione calcolato in $(x(a), y(a), a)$. Si ha dunque che:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(a), y(a), a) \cdot \vec{v}_x + \frac{\partial F}{\partial y}(x(a), y(a), a) \cdot \vec{v}_y = 0 \quad (2.15)$$

Ma dato che la tangente $(\dot{x}(a), \dot{y}(a))$ all'inviluppo deve essere diretta come la tangente (\vec{v}_x, \vec{v}_y) alla curva della famiglia, deve essere che $\vec{v}_x = c \cdot \dot{x}(a)$ e $\vec{v}_y = c \cdot \dot{y}(a)$, e allora la (2.15), semplificando c , si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(a), y(a), a) \cdot x'(a) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(a), y(a), a) \cdot y'(a) = 0 \quad (2.16)$$

La (2.14) e la (2.16) formano un sistema di due equazioni che possiamo semplificare nel seguente modo. Differenziando l'equazione (2.14) e otteniamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(a), y(a), a) \cdot x'(a) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(a), y(a), a) \cdot y'(a) + \frac{\partial F}{\partial a}(x(a), y(a), a) = 0 \quad (2.17)$$

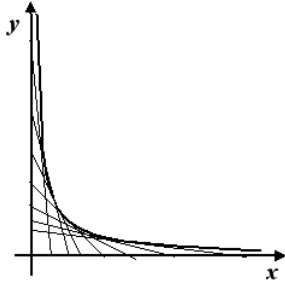
E dunque, confrontando la (2.15) con la (2.16), ricaviamo che, per differenza membro a membro:

$$\frac{\partial F}{\partial a}(x(a), y(a), a) = 0 \quad (2.18)$$

Dunque le equazioni parametriche dell'inviluppo si ottengono risolvendo rispetto a x e a y il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F(x(a), y(a), a) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a}(x(a), y(a), a) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Esempio: l'iperbole come inviluppo. Consideriamo nel primo quadrante tutte le rette (con pendenza negativa) che formano con gli assi un triangolo di area 1.



Chiamiamo a l'intersezione della generica retta con l'asse delle x e b l'intersezione con l'asse delle y . Dato che l'area del triangolo sotto al grafico, nel primo quadrante, deve essere pari a 1, deve succedere che $\frac{1}{2}ab = 1$, o ancora: $b = \frac{2}{a}$. La pendenza della generica retta passante per i punti $(a, 0)$ e $(0, \frac{2}{a})$ è dunque di $-\frac{2}{a^2}$, e la sua equazione è (imponendo il passaggio per il primo punto):

$$y = -\frac{2}{a^2}(x - a)$$

$F(x, y, a) = x + \frac{a^2}{2}y - a$ è dunque una famiglia di funzioni, dipendenti dalla scelta del parametro a . Calcoliamone l'inviluppo mediante il sistema (2.19). Risulta che:

$$\begin{cases} F(x, y, a) = x + \frac{a^2}{2}y - a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a} = ay - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow \quad (2.20)$$

Dunque l'inviluppo cercato è

$$\begin{cases} x(a) = a/2 \\ y(a) = 1/a \end{cases} \quad (2.21)$$

e, per eliminazione di a , ricaviamo velocemente l'inviluppo come luogo geometrico: $xy = \frac{1}{2}$, che è una ben nota iperbole.

Esempio: ellissi. Ogni curva è l'inviluppo delle sue tangenti. Proviamo dunque a prendere l'ellissi

$$\begin{cases} x(\varphi) = a \cos \varphi \\ y(\varphi) = b \sin \varphi \end{cases} \quad (2.22)$$

e troviamo il luogo delle sue tangenti nella forma $F(x, y, \varphi) = 0$, e quindi calcoliamone l'inviluppo, ritrovando l'ellissi originaria.

Dalla equazione (1.4) sappiamo che la generica tangente in un generico punto (x_0, y_0) dell'ellissi è

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Ma, dal momento che (x_0, y_0) è un punto dell'ellissi, grazie (2.22) possiamo introdurre la parametrizzazione dell'angolo φ e riscrivere la tangente in (x_0, y_0) come

$$\frac{x}{a} \cos \varphi_0 + \frac{y}{b} \sin \varphi_0 = 1$$

Da cui, il luogo delle tangenti all'ellissi ha la seguente forma²:

$$F(x, y, \varphi) = \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0 \quad (2.23)$$

Calcoliamo ora l'inviluppo della (2.23), con le formule del sistema (2.19). Dobbiamo imporre le condizioni di passaggio per il punto e di tangenza tra inviluppo e curva del fascio. Ovvero:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, \varphi) = \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} \cos \varphi - 1 = \frac{y}{b} \sin \varphi \\ \frac{y}{b} \cos \varphi = \frac{x}{a} \sin \varphi \end{array} \right. \quad (2.24)$$

E moltiplicando membro a membro le equazioni del sistema otteniamo:

$$\frac{yx}{ba} \cos^2 \varphi - \frac{y}{b} \cos \varphi = -\frac{xy}{ab} \sin^2 \varphi$$

e, dato che i termini in $\sin^2 \varphi$ e $\cos^2 \varphi$ sommati danno $\frac{yx}{ba}$, si ha che

$$\frac{yx}{ba} = \frac{y}{b} \cos \varphi$$

$$x = a \cos \varphi$$

e in maniera analoga si trova che

$$y = b \cos \varphi$$

che sono le equazioni parametriche da cui eravamo partiti.

Esempio: evoluta di una parabola. Calcoliamo l'evoluta di una parabola $y = \frac{x^2}{2}$ come inviluppo delle sue normali. Parametizziamo la parabola con $x = t$ e otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

²In questo caso a e b sono fissati e il parametro della curva è φ .

Calcoliamo la normale per il generico punto della parabola (x_0, y_0) . Considerando la parabola come linea di livello di $F(x, y) = y - \frac{x^2}{2}$, otteniamo che il gradiente di tale funzione F deve essere perpendicolare alle sue linee di livello, in particolare, dunque anche alla parabola stessa. Dunque la normale alla parabola e il gradiente di F sono paralleli in ogni punto della parabola. Detto dunque (x, y) il generico punto della normale (per (x_0, y_0)) alla parabola, imponiamo la condizione di parallelismo tra il $\text{grad}F|_{(x_0, y_0)} = (-x_0, 1)$ e il vettore $(x - x_0, y - y_0)$, e dall'algebra lineare otteniamo:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -x_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

E, ricordando la parametrizzazione (2.25):

$$\begin{vmatrix} x - t_0 & y - \frac{t_0^2}{2} \\ -t_0 & 1 \end{vmatrix} = x - t_0 + t_0 y - \frac{t_0^3}{2} = 0$$

da cui, il luogo delle normali alla parabola in un suo generico punto è

$$F(x, y, t) = x + t(y - 1) - \frac{t^3}{2} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora calcoliamo l'inviluppo con le formule (2.19):

$$\begin{cases} F(x, y, t) = x + t(y - 1) - \frac{t^3}{2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t} = y - 1 - \frac{3}{2}t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2}t^2 - \frac{t^3}{2} = 0 \\ y = 1 + \frac{3}{2}t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -t^3 \\ y(t) = 1 + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

Per eliminazione della t otteniamo le coordinate cartesiane:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 1$$

Questa curva viene definita **parabola semicubica**. Essa risulta essere (naturalmente) simmetrica rispetto all'asse y e con una cuspide nell'origine. Infatti le derivate prime sono:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3t^2 \\ \dot{y}(t) = 3t \end{cases}$$

che sono entrambe nulle in $t = x = 0$. Il coefficiente angolare della tangente alla semicubica è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{1}{t}$$

Abbiamo trovato che l'evoluta di una parabola è una parabola semicubica. Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato servendoci della definizione di evoluta, calcolandoci il luogo dei centri di curvatura. Parametizziamo la parabola ancora come nel sistema (2.25) con il parametro t . Si ha che:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 1 \end{cases}$$

E dalla formula (1.15) la curvatura vale:

$$k = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{v^3} = \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}$$

Imponiamo ora che il centro di curvatura $C(t)$ appartenga alla normale e disti dalla parabola $\frac{1}{k}$.

$$\begin{cases} x_c(t) + ty_c(t) - t - \frac{t^3}{2} = 0 \\ (x_c(t) - t)^2 + (y_c(t) - \frac{t^2}{2})^2 = (1 + t^2)^3 \end{cases} \quad (2.26)$$

Risolviendo il sistema si ottengono nuovamente le equazioni parametriche della parabola semicubica.

Esempio: evoluta di una cicloide. Calcoliamoci, questa volta mediante il sistema (2.13) le equazioni parametriche dell'evoluta della cicloide. Si ha:

$$\begin{cases} x = \varphi - \sin \varphi \\ y = 1 - \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 1 - \cos \varphi \\ \dot{y} = \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \sin \varphi \\ \ddot{y} = \cos \varphi \end{cases}$$

Dunque

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + \sin^2 \varphi} = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi}$$

e, dal sistema (2.13) l'evoluta risulta essere:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^*(t) = x(t) - \frac{v^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\dot{y} \\ y^*(t) = y(t) + \frac{v^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^*(t) = \varphi - \sin \varphi - \frac{2-2\cos\varphi}{(1-\cos\varphi)\cos\varphi - \sin^2\varphi} \sin \varphi \\ y^*(t) = 1 - \cos \varphi + \frac{2-2\cos\varphi}{(1-\cos\varphi)\cos\varphi - \sin^2\varphi} (1 - \cos \varphi) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} x^*(t) = \varphi - \sin \varphi + 2 \frac{1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \cos\varphi} \sin \varphi = \varphi - \sin \varphi + 2 \sin \varphi \\ y^*(t) = 1 - \cos \varphi - 2 \frac{1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \cos\varphi} (1 - \cos \varphi) = 1 - \cos \varphi - 2 + 2 \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} x^*(t) = \varphi + \sin \varphi \\ y^*(t) = -1 + \cos \varphi \end{cases} \quad (2.27) \end{aligned}$$

Che curva rappresentano le equazioni parametriche (2.27)? Se cambiamo parametrizzazione, introducendo un parametro τ tale che $\varphi = \pi + \tau$ si ha che³

$$\begin{cases} x^*(t) = \pi + \tau - \sin \tau \\ y^*(t) = -1 - \cos \tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^*(t) - \pi = \tau - \sin \tau \\ y^*(t) + 2 = 1 - \cos \tau \end{cases} \quad (2.28)$$

Dunque l'evolva di una cicloide è ancora una cicloide, ottenuta dalla prima mediante la seguente traslazione di assi:

$$\begin{cases} X = x^*(t) - \pi \\ Y = y^*(t) + 2 \end{cases}$$

Cicloidì e orologi. Il risultato precedente (ossia l'aver scoperto che l'evolva di una cicloide è una cicloide) è di grande importanza anche per le applicazioni pratiche. In particolare, infatti, già Huygens aveva teorizzato e costruito un pendolo cicloidale. Rispetto al pendolo semplice galileiano (le cui oscillazioni risultavano approssimativamente isocrone solo per angoli piccoli), il pendolo huygensiano aveva la proprietà di isocronia delle oscillazioni indipendentemente dall'ampiezza delle oscillazioni stesse.

Nel pendolo semplice galileiano, il punto materiale, legato con un filo ad un punto fisso, oscilla su una circonferenza, la cui evolva è il punto fisso attorno a cui sta oscillando. Invece se prendiamo una cicloide rovesciata e appendiamo un filo di lunghezza l in un massimo di tale curva (sulla cuspidè, insomma) e lasciamo che il punto materiale appeso all'altra estremità del filo oscilli, il filo stesso si avvolgerà intorno alla guida costituita dalla cicloide stessa. Per il legame tra evolva ed evolvente, la curva β descritta dal punto materiale è ancora una cicloide, dunque le oscillazioni (anche grandi) risultano isocrone.

³Ricordiamo che $\sin \varphi = \sin(\pi + \tau) = -\sin \tau$ e $\cos \varphi = \cos(\pi + \tau) = -\cos \tau$.

Capitolo 3

Curve nello spazio

3.1 Da \mathbb{E}^2 a \mathbb{E}^3

Nel caso piano abbiamo visto che, per il Teorema di Bonnet, è sufficiente un solo parametro differenziale ($k(s)$, la curvatura con segno) a caratterizzare la geometria della curva. Per le curve nello spazio tale parametro non basta più: ad esso va affiancato un altro parametro che chiameremo **torsione** ($\tau(s)$). Per definire $k(s)$ e $\tau(s)$ useremo il metodo di Frenet; in particolare ci serviremo del cosiddetto metodo del triedro mobile. Associeremo alla curva una terna ortonormata di vettori (detta appunto triedro di Frenet) particolarmente legata alla curva e di introdurre i parametri differenziali della curva come coefficienti della matrice di Cartan del triedro.

Le definizioni coincidono con quelle del caso piano: la curva α (fig. ??) è un'applicazione $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ che sia per lo meno continua. La curva si dice differenziabile se la funzione α è differenziabile, cioè se le componenti $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono di classe \mathcal{C}^1 .

Per tali curve è definita una velocità $v = \dot{P}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$, dove $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ è il generico punto che si muove sulla curva α al variare di t . Diremo che la curva sarà regolare se la velocità esisterà non nulla in ogni punto, ovvero se $\vec{v} \neq 0 \quad \forall t \in I$. La curva α , inoltre, si dirà **curva di Frenet** se oltre ad essere regolare ($\|\dot{P}(t)\| \neq 0$) sussisterà anche $\|\ddot{P}(t)\| \neq 0$. In seguito considereremo curve di Frenet di classe almeno \mathcal{C}^3 . La funzione arco è ancora definita come integrale nel tempo della velocità:

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

e valgono le proprietà già citate.

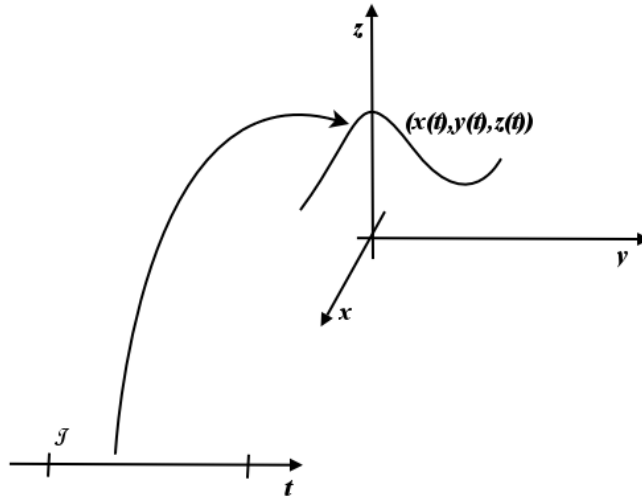


Figura 3.1: Una curva in tre dimensioni

3.2 Il triedro di Frenet: curvatura e torsione

Poiché α è regolare, esiste ed è univocamente definita in ogni punto la retta tangente. Dalla definizione dell'arco s risulta che il vettore $\vec{t} = \frac{dP}{ds}$ ha norma unitaria, dunque è il versore tangente. Infatti:

$$\|\vec{t}\| = \left\| \frac{dP}{ds} \right\| = \left\| \frac{dP}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \right\| = \left\| \frac{dP}{dt} \frac{1}{v} \right\| = v \frac{1}{v} = 1$$

Si osserva che da

$$\vec{t} \cdot \vec{t} = 1$$

segue per derivazione (regola di Leibniz) che:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{t} = 0$$

Per quale ragione si annulla quel prodotto scalare? $\vec{t}=0$ non può mai esserlo per la regolarità di α ; inoltre $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2P}{ds^2} = 0$ non può mai esserlo per il fatto che α è di Frenet. Dunque necessariamente deve essere che

$$\frac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{t} \tag{3.1}$$

ossia che la derivata del versore tangente e il versore tangente siano ortogonali. Insomma, tra tutte le possibili direzioni normali al vettore \vec{t} , ne possiamo

fissare una particolare, che chiamiamo **vettore curvatura**, e che è data da $\vec{k}(s) = \frac{d\vec{t}}{ds}$. La direzione del vettore curvatura è detta **normale principale** ($\vec{n} := \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$), il suo modulo (grandezza non negativa, è detto **curvatura scalare**.

Si completa la coppia (\vec{t}, \vec{n}) con la **binormale** $\vec{b}(s) = \vec{t} \wedge \vec{n}$, in modo tale che la terna ordinata $F := (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ sia una terna ortonormale equiorientata rispetto alla base fissa.

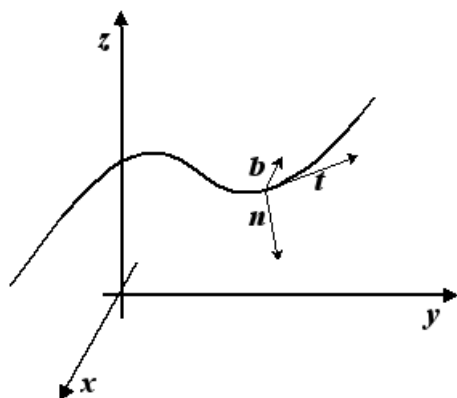


Figura 3.2: Il triedro di Frenet

- Il piano dei vettori \vec{t} e \vec{n} è detto **piano osculatore**
- Il piano dei vettori \vec{n} e \vec{b} è detto **piano normale**
- Il piano dei vettori \vec{t} e \vec{b} è detto **piano rettificante**

L'idea base è che al muoversi di P sulla curva α la terna di Frenet si muove di conseguenza: a ogni punto di α è associata la sua terna di Frenet F . Dal moto di F riusciamo a risalire alla geometria locale di α nell'intorno di P . Ma il moto di F è descritto dalla matrice di Cartan, la matrice delle componenti delle derivate dei vettori della base sviluppate rispetto alla base stessa. In altri termini, dato che F è una base per \mathbb{R}^3 , deve succedere che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{t}}{ds} = a\vec{t} + b\vec{n} + c\vec{b} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = A\vec{t} + B\vec{n} + C\vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = \alpha\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b} \end{array} \right.$$

con $\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ matrice di Cartan della base.

Il nostro problema è calcolare i coefficienti di tale matrice. Il ragionamento è analogo a quello fatto per il caso piano; infatti poiché la base è ortonormata:

$$\vec{t} \cdot \vec{t} = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

$$\vec{t} \cdot (a\vec{t} + b\vec{n} + c\vec{b}) = 0 \Rightarrow a = 0$$

perché i termini misti scompaiono dal prodotto scalare. Analogamente (da $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ e $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$) si deduce che $B = 0$ e $\gamma = 0$.

Inoltre, sempre per l'ortonormalità della base:

$$\begin{aligned} \vec{t} \cdot \vec{n} = 0 &\Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{n} + \vec{t} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a\vec{t} + b\vec{n} + c\vec{b}) \cdot \vec{n} + \vec{t} \cdot (A\vec{t} + B\vec{n} + C\vec{b}) = 0 \Rightarrow b + A = 0 \end{aligned}$$

e analogamente (da $\vec{t} \cdot \vec{b} = 0$ e $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$) si trova che $\alpha + c = 0$ e $\beta + C = 0$. La matrice di Cartan risulta dunque ancora una volta antisimmetrica (ciò è dovuto all'ortonormalità della base).

Infine, poiché la base è di Frenet (abbiamo scelto, precedentemente, tra tutto il fascio di normali, una particolare normale), deve sussistere che

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}$$

da cui si deduce immediatamente: $a = 0$ (relazione già trovata), $b = k$ e $c = 0$ (vincolo supplementare dovuto alla base di Frenet). Per antisimmetria della matrice di Cartan deve essere anche $\alpha = 0$.

Ponendo $\tau = C$ si ha¹, in definitiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{t} + \tau\vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

¹Si noti che tale scelta è arbitraria: si poteva porre anche $\tau = -C$, ma si opta per la precedente soluzione per avere nella matrice di Cartan lo stesso segno ai parametri sopra la diagonale e sotto la diagonale.

e la matrice di Cartan risulta essere $\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$. Il coefficiente $\tau(s)$ è detto **torsione** della curva, e misura la non planarietà della curva.

Teorema 3.1. *Se $\tau(s) = 0 \quad \forall s \in I$, allora α è piana.*

Dimostrazione. Infatti dalla terza equazione del sistema (3.2):

$$\tau(s) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{b}(s)}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{b}(s) = \vec{\text{cost}}$$

Ma $\vec{t} \cdot \vec{b} = 0$ per l'ortonormalità della base, dunque:

$$\vec{t} \cdot \vec{b} = \frac{dP}{ds} \cdot \vec{\text{cost}} = \frac{d}{ds}(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{\text{cost}}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \vec{\text{cost}} = h$$

che è l'equazione di un piano. \square

3.2.1 Calcolo di $k(s)$ e $t(s)$ con la parametrizzazione naturale

Ricapitolando, per ogni curva regolare, $\alpha \in \mathcal{C}^2$ abbiamo ora a disposizione una base ortonormata di vettori:

$$\vec{t}(s) := \frac{dP}{ds} \quad \vec{n}(s) := \frac{\vec{k}(s)}{k(s)} = \frac{\frac{d^2P}{ds^2}}{k(s)} \quad \vec{b}(s) := \vec{t} \wedge \vec{n} \quad (3.3)$$

Inoltre se $\alpha \in \mathcal{C}^3$ possiamo anche derivare \vec{b} e \vec{n} (che già sono derivate seconde di P); ricordando inoltre che tra tutte le normali a \vec{t} abbiamo scelto come normale principale la direzione del vettore curvatura $\vec{k}(s) = \frac{d\vec{t}}{ds}$, si ha che:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{n} + \tau\vec{b} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n} \quad (3.4)$$

Calcoliamoci ora $k(s)$ e $\tau(s)$ in funzione delle derivate del vettore posizione P , ovvero delle sue componenti $x(s)$, $y(s)$ e $z(s)$.

$$k(s) := \left\| \frac{d^2P}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2P}{ds^2} \right\|$$

$$k(s) := \|P''(s)\| = \|P'(s) \wedge P''(s)\| \quad (3.5)$$

dal momento che, dalla (3.3) e (3.4) si ha che

$$\frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2P}{ds^2} = \frac{dP}{ds} \wedge k(s)\vec{n} = k(s) \cdot \vec{t} \wedge \vec{n} = k(s) \cdot \vec{b}$$

Inoltre si ha²:

$$\tau(s) := \frac{P'(s) \cdot P''(s) \wedge P'''(s)}{k^2(s)} \quad (3.6)$$

Infatti:

$$\tau = -\vec{n} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} = -\vec{n} \cdot \frac{d}{ds}(\vec{t} \wedge \vec{n}) = -\vec{n} \cdot \left(\frac{d\vec{t}}{ds} \wedge \vec{n} + \vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} \right)$$

Ma dato che $\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}$, e che $k\vec{n} \wedge \vec{n} = 0$ per il parallelismo dei due vettori, si ha:

$$\tau = -\vec{n} \cdot \vec{t} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{k} P'' \cdot \vec{t} \wedge \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k} P'' \right) = -\frac{1}{k} P'' \cdot P' \wedge \left(-\frac{1}{k^2} \frac{dk}{dt} P'' + \frac{1}{k} P''' \right)$$

D'altro canto, il termine in P'' all'interno della parentesi scompare nel prodotto misto, essendo parallelo al primo termine. Dunque abbiamo che:

$$\tau = -\frac{1}{k} P'' \cdot P' \wedge \frac{1}{k} P''' = \frac{-P'' \cdot P' \wedge P'''}{k^2} = \frac{P' \cdot P'' \wedge P'''}{k^2}$$

3.2.2 Calcolo di $k(s)$ e $t(s)$ con parametrizzazione arbitraria

Ora, come già fatto in precedenza per le curve piane, ricalcoliamo curvatura e torsione per una curva α parametrizzata con una parametrizzazione arbitraria. Sia $t = t(s)$ un parametro arbitrario, e sia $P(t) = P(t(s))$ la parametrizzazione della curva con tale parametro. Procuriamoci le espressioni delle derivate di P che legano parametrizzazione naturale e arbitraria.

$$P' = \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \frac{dP}{dt} = \frac{\dot{P}}{v} \quad (3.7)$$

e ricordandoci la (2.6):

$$P'' = \frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d}{ds} \frac{dP}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \frac{dP}{dt} \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{v} \frac{d^2P}{dt^2} + \frac{-\frac{dv}{dt}}{v^2} \frac{dP}{dt} \right) = \frac{\ddot{P}}{v^2} - \frac{\dot{v}\dot{P}}{v^3} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} P''' &= \frac{d^3P}{ds^3} = \frac{d}{ds} \frac{d^2P}{ds^2} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{P}}{v^2} - \frac{\dot{v}\dot{P}}{v^3} \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{\ddot{P}v^2 - 2\dot{P}v\dot{v}}{v^4} - \frac{(\ddot{v}\dot{P} + \dot{v}\ddot{P})v^3 - 3\dot{P}v^2\dot{v}^2}{v^6} \right) = \\ &= \frac{\ddot{P}}{v^3} - 3\frac{\dot{v}\dot{P}}{v^4} + \left(-\frac{\ddot{v}}{v^4} + \frac{3\dot{v}^2}{v^5} \right) \dot{P} \quad (3.9) \end{aligned}$$

²La notazione $\vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}$ indica il prodotto misto, in cui naturalmente la prima operazione da eseguire è il prodotto vettoriale.

Dunque:

$$k = \|P' \wedge P''\| = \left\| \frac{1}{v} \dot{P} \wedge \left(\frac{\ddot{P}}{v^2} - \frac{\dot{v}\dot{P}}{v^3} \right) \right\| = \left\| \frac{\dot{P}}{v} \wedge \left(\frac{\ddot{P}}{v^2} - \frac{\dot{P}}{v} \wedge \frac{\dot{v}\dot{P}}{v^3} \right) \right\|$$

Ma il secondo prodotto vettoriale è nullo, per il parallelismo dei due vettori (entrambi hanno la direzione di \dot{P}), dunque

$$k = \left\| \frac{\dot{P}}{v} \wedge \frac{\ddot{P}}{v^2} \right\| = \frac{\|\dot{P} \wedge \ddot{P}\|}{v^3} \quad (3.10)$$

Spesso tuttavia sarà più comodo utilizzare il quadrato della curvatura, dunque calcoliamocelo. Detto θ l'angolo compreso tra \dot{P} e \ddot{P} si ha:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\|\dot{P} \wedge \ddot{P}\|^2}{v^6} = \frac{(\|\dot{P}\| \|\ddot{P}\| \sin \theta)^2}{v^6} = \frac{\|\dot{P}\|^2 \|\ddot{P}\|^2 (1 - \cos^2 \theta)}{v^6} = \\ &= \frac{\|\dot{P}\|^2 \|\ddot{P}\|^2 - \|\dot{P}\|^2 \|\ddot{P}\|^2 \cos^2 \theta}{v^6} = \frac{\|\dot{P}\|^2 \|\ddot{P}\|^2 - (\dot{P} \cdot \ddot{P})^2}{v^6} \end{aligned}$$

Dunque, riscrivendo le norme dei vettori come prodotti scalari:

$$k^2 = \frac{(\dot{P} \cdot \dot{P})(\ddot{P} \cdot \ddot{P}) - (\dot{P} \cdot \ddot{P})^2}{v^6} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{P} \cdot \dot{P} & \dot{P} \cdot \ddot{P} \\ \dot{P} \cdot \ddot{P} & \ddot{P} \cdot \ddot{P} \end{vmatrix}}{v^6} \quad (3.11)$$

Infine per la torsione:

$$\tau = \frac{P' \cdot P'' \wedge P'''}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left[\frac{\dot{P}}{v} \cdot \left(\frac{\ddot{P}}{v^2} - \frac{\dot{v}\dot{P}}{v^3} \right) \wedge \left(\frac{\ddot{P}}{v^3} - 3 \frac{\dot{v}\ddot{P}}{v^4} + \left(-\frac{\ddot{v}}{v^4} + \frac{3\dot{v}^2}{v^5} \right) \dot{P} \right) \right]$$

Ma nell'operazione di prodotto misto, all'interno delle due parentesi le derivate di ordine superiore scompaiono, dunque resta:

$$\tau = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\dot{P}}{v} \cdot \frac{\ddot{P}}{v^2} \wedge \frac{\ddot{P}}{v^3} \right) = \frac{1}{k^2 v^6} (\dot{P} \cdot \ddot{P} \wedge \ddot{P}) = \frac{\dot{P} \cdot \ddot{P} \wedge \ddot{P}}{(\dot{P} \cdot \dot{P})(\ddot{P} \cdot \ddot{P}) - (\dot{P} \cdot \ddot{P})^2} \quad (3.12)$$

dove l'ultimo passaggio vale in virtù dell'espressione poc'anzi trovata per k^2 (equazione (3.11)).

Esempio: calcolo della torsione. Calcoliamo la torsione della curva:

$$\begin{cases} x = a \cosh t \cos t \\ y = a \cosh t \sin t \\ z = at \end{cases}$$

Abbiamo innanzitutto che:

$$\dot{P} : \begin{cases} \dot{x} = a(\sinh t \cos t - \cosh t \sin t) \\ \dot{y} = a(\sinh t \sin t + \cosh t \cos t) \\ \dot{z} = a \end{cases} \quad \ddot{P} : \begin{cases} \ddot{x} = -2a \sinh t \sin t \\ \ddot{y} = 2a \sinh t \cos t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{P} : \begin{cases} \ddot{x} = -2a(\cosh t \sin t + \sinh t \cos t) \\ \ddot{y} = 2a(\cosh t \cos t - \sinh t \sin t) \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Prima di utilizzare l'equazione (3.12), calcoliamo ciò che ci serve:

$$\begin{aligned} \dot{P}\dot{P} = \|\dot{P}\|^2 &= a^2(\sinh^2 t \cos^2 t + \cosh^2 t \sin^2 t + \\ &\quad + \sinh^2 t \sin^2 t + \cosh^2 t \cos^2 t) = a^2(\sinh^2 t + \cosh^2 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}\ddot{P} = \ddot{P}\dot{P} &= 2a^2(-\sinh^2 t \sin t \cos t + \cosh t \sinh t \sin^2 t + \\ &\quad + \sinh^2 t \sin t \cos t + \cosh t \sinh t \cos^2 t) = 2a^2 \cosh t \sinh t \end{aligned}$$

$$\ddot{P}\ddot{P} = \|\ddot{P}\|^2 = 4a^2(\sinh^2 t \sin^2 t + \sinh^2 t \cos^2 t) = 4a^2 \sinh^2 t$$

e dunque:

$$\begin{vmatrix} \dot{P}\dot{P} & \dot{P}\ddot{P} \\ \dot{P}\ddot{P} & \ddot{P}\ddot{P} \end{vmatrix} = 4a^4[\sinh^2 t(\sinh^2 t + \cosh^2 t) - \cosh^2 t \sinh^2 t] = 4a^2 \sinh^4 t$$

Infine:

$$\begin{aligned} \dot{P} \cdot \ddot{P} \wedge \ddot{P} &= \begin{vmatrix} a(\sinh t \cos t - \cosh t \sin t) & a(\sinh t \sin t + \cosh t \cos t) & a \\ -2a \sinh t \sin t & 2a \sinh t \cos t & 0 \\ -2a(\cosh t \sin t + \sinh t \cos t) & 2a(\cosh t \cos t - \sinh t \sin t) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= a[4a^2(-\cosh t \cos t \sinh t \sin t + \sinh^2 t \sin^2 t + \\ &\quad + \cosh t \sinh t \sin t \cos t + \sinh^2 t \cosh^2 t)] = \\ &= 4a^3 \sinh^2 t \end{aligned}$$

Ora non è difficile, mediante la formula (3.12), ricavare la torsione:

$$\tau = \frac{\dot{P} \cdot \ddot{P} \wedge \ddot{P}}{(\dot{P}\dot{P})(\ddot{P}\ddot{P}) - (\dot{P}\ddot{P})^2} = \frac{4a^3 \sinh^2 t}{4a^4 \sinh^4 t} = \frac{1}{a \sinh^2 t}$$

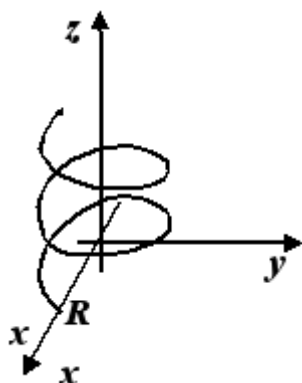


Figura 3.3: L'elica cilindrica

Esempio: elica cilindrica. L'elica cilindrica è la curva risultante dal moto composto di un moto rotatorio uniforme attorno a un asse e di un moto traslatorio uniforme intorno allo stesso asse. Per fissare le idee si può immaginare un punto che si muove su un cavatappi o su una vite.

Possiamo immaginare l'elica cilindrica come traiettoria che viene descritta ruotando su un cilindro di raggio R . Le equazioni parametriche dell'elica cilindrica sono dunque le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \\ z(t) = ct \end{cases} \quad (3.13)$$

dunque $P(t) = (R \cos(\omega t))\vec{i} + (R \sin(\omega t))\vec{j} + (ct)\vec{k}$, con c , ω e R costanti fissate.

La quantità $T = c \cdot 2\pi$ viene detta **passo dell'elica**.

Si ha inoltre che:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= (-\omega R \sin(\omega t))\vec{i} + (\omega R \cos(\omega t))\vec{j} + c\vec{k} \\ \ddot{P}(t) &= (-\omega^2 R \cos(\omega t))\vec{i} + (-\omega^2 R \sin(\omega t))\vec{j} \\ \ddot{\ddot{P}}(t) &= (\omega^3 R \sin(\omega t))\vec{i} + (-\omega^3 R \cos(\omega t))\vec{j} \end{aligned}$$

La funzione arco vale:

$$s = \int_{t_0}^t v(\xi) d\xi \quad (3.14)$$

da cui si ricava, derivando ambo i membri rispetto al parametro t :

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \|\dot{P}\| = \sqrt{\omega^2 R^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + c^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + c^2} \quad (3.15)$$

Si noti che l'uguaglianza $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\omega^2 R^2 + c^2}$ esprime la legge di composizione delle velocità di Galileo: la velocità di traslazione verso l'alto (c) e la velocità tangenziale di rotazione (ωR), ad essa perpendicolare.

Calcoliamoci la curvatura k . Dalla (3.11) abbiamo che:

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{P}\dot{P} & \dot{P}\ddot{P} \\ \dot{P}\ddot{P} & \ddot{P}\ddot{P} \end{vmatrix}}{v^6} = \frac{\begin{vmatrix} \omega^2 R^2 + c^2 & 0 \\ 0 & \omega^4 R^2 \end{vmatrix}}{(\omega^2 R^2 + c^2)^3} = \frac{(\omega^2 R^2 + c^2)\omega^4 R^2}{(\omega^2 R^2 + c^2)^3} = \frac{\omega^4 R^2}{(\omega^2 R^2 + c^2)^2}$$

e dunque si ha che

$$k = \frac{\omega^2 R}{\omega^2 R^2 + c^2} \quad (3.16)$$

Si noti che la curvatura non dipende da t , dunque è costante; inoltre per $c = 0$ tale curvatura è quella della circonferenza. L'aggiunta di c^2 al denominatore, dunque tiene conto dell'esistenza di una velocità di traslazione verso l'alto. Per quanto riguarda la torsione, dalla (3.12) si ha:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\dot{P} \cdot \ddot{P} \wedge \ddot{P}}{(\dot{P} \cdot \dot{P})(\ddot{P}\ddot{P}) - (\dot{P} \cdot \ddot{P})^2} = \frac{\begin{vmatrix} -\omega R \sin(\omega t) & \omega R \cos(\omega t) & c \\ -\omega^2 R \cos(\omega t) & -\omega^2 R \sin(\omega t) & 0 \\ \omega^3 R \sin(\omega t) & -\omega^3 R \cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega^2 R^2 + c^2 & 0 \\ 0 & \omega^4 R^2 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{c(\omega^5 R^2 \cos^2(\omega t) + \omega^5 R^2 \sin^2(\omega t))}{\omega^4 R^2(\omega^2 R^2 + c^2)} = \frac{c\omega}{\omega^2 R^2 + c^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si noti che anche la torsione non dipende dal parametro t , e dunque è costante. Si può dimostrare che l'elica cilindrica è l'unica curva a curvatura e torsioni costanti (non nulle). In oltre si dimostrano le seguenti piccole proposizioni.

Proposizione 3.2. *L'angolo che il vettore tangente forma con il piano xy è costante.*

Dimostrazione. Il vettore tangente ha la stessa direzione del vettore velocità, dunque dimostriamo che l'angolo θ tra $\dot{P}(t)$ e il piano xy è costante.

$$\dot{P}(t) = (-\omega R \sin(\omega t))\vec{i} + (\omega R \cos(\omega t))\vec{j} + c\vec{k}$$

da cui si ricavano la componente \dot{P}_{xy} sul piano xy e la componente \dot{P}_z lungo l'asse z . Si ha che:

$$\dot{P}_{xy}(t) = (-\omega R \sin(\omega t))\vec{i} + (\omega R \cos(\omega t))\vec{j}$$

$$\dot{P}_z(t) = c\vec{k}$$

La tangente dell'angolo formato da \dot{P} con il piano xy è il rapporto tra i moduli di questi due vettori:

$$\|\dot{P}_{xy}(t)\| = \sqrt{\omega^2 R^2 \sin^2(\omega t) + \omega^2 R^2 \cos^2(\omega t)} = \omega R$$

$$\|\dot{P}_z(t)\| = c$$

dunque si ha:

$$\tan \theta = \frac{\omega R}{c} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{\omega R}{c}$$

che non dipende da t ed è costante su tutta l'elica. \square

Proposizione 3.3. *Per ogni t , la direzione della normale principale alla curva interseca l'asse di rotazione.*

Dimostrazione. La direzione della normale principale è la stessa direzione del vettore normale $\vec{k}(s) = \frac{d^2 P}{ds^2} = P''$. Ma per l'equazione (3.8):

$$\vec{k}(t) = \frac{\ddot{P}}{v^2} - \frac{\dot{v}\dot{P}}{v^3}$$

Essendo v costante per l'elica cilindrica, $\dot{v} = 0$, e il secondo addendo scompare, e sostituendo le espressioni di \ddot{P} e di v si ha:

$$\vec{k}(t) = -\frac{\omega^2 R}{\omega^2 R^2 + c^2} \cos(\omega t) \vec{i} - \frac{\omega^2 R}{\omega^2 R^2 + c^2} \sin(\omega t) \vec{j}$$

Tale vettore giace su un piano π parallelo al piano xy . La direzione di questo vettore dunque è una retta in un piano parallelo a xy avente pendenza pari al rapporto tra i coefficienti della \vec{j} e della \vec{i} , ovvero:

$$m = \tan(\omega t)$$

e imponendo il passaggio per un generico punto $P_0 = (R \cos(\omega t_0), R \sin(\omega t_0), ct_0)$, in cui $x_0 = R \cos(\omega t_0)$ e $y_0 = R \sin(\omega t_0)$ la retta sul piano π_0 (parallelo al piano xy) assume la forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - R \sin(\omega t_0) = \tan(\omega t)(x - R \cos(\omega t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x \tan(\omega t) - R \cos(\omega t) \tan(\omega t) + R \sin(\omega t) \Rightarrow y = x \tan(\omega t)$$

che è una retta passante per l'origine. Dato che ciò vale per ogni punto P_0 dell'elica, in ogni punto la direzione della normale principale intercetta l'asse z , e la tesi è dimostrata. \square

3.3 Teorema fondamentale di Bonnet (nello spazio)

Teorema 3.4 (Bonnet). *Date ad arbitrio due funzioni $\tau(s)$ di classe \mathcal{C}^0 e $k(s)$ di classe \mathcal{C}^1 , esiste sempre ed è unica (a meno di uno spostamento rigido nello spazio) la curva α di classe \mathcal{C}^3 avente s come arco, $k(s)$ come curvatura e $\tau(s)$ come torsione.*

Insomma, il teorema afferma che non vi sono altri parametri differenziali indipendenti da k e τ nella geometria delle curve spaziali, quindi la teoria è completa³. Inoltre non ci sono vincoli (né finiti, né differenziali), detti anche condizioni di compatibilità, che limitano i valori assumibili da $k(s)$ e $\tau(s)$. Dati questi ultimi ad arbitrio, sarà sempre possibile trovare una curva avente tale curvatura e tale torsione. Dopo questi chiarimenti, vediamo la dimostrazione del teorema.

Dimostrazione. Si procede in tre passi.

Passo 1. Indicheremo con $\vec{e}(s) = \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$ il vettore colonna i cui elementi sono

i vettori della base di Frenet. Dato che i vettori di $\vec{e}(s)$ sono una base, essi verificano la seguente equazione differenziale lineare:

$$\frac{d\vec{e}(s)}{ds} = \Omega(s) \cdot \vec{e}(s) \quad (3.18)$$

con $\Omega(s)$ matrice di Cartan della base $\vec{e}(s)$. Se aggiungiamo la condizione iniziale $e(0) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, abbiamo un problema di Cauchy. Per il Teorema fondamentale di Cauchy in grande, sappiamo che l'equazione differenziale (3.18) ammette un'unica soluzione esplicita $\vec{e}(s)$, $\forall s \in I$ dove $\Omega(s)$ è continua⁴. In altre parole, dati $k(s)$ e $\tau(s)$ ho

$$\Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

e il problema di Cauchy $\begin{cases} \frac{d\vec{e}}{ds} = \Omega(s) \cdot \vec{e}(s) \\ \vec{e}(0) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \end{cases}$, nelle condizioni di cui sopra,

ammette un'unica soluzione $\vec{e}(s)$. Ho associato così a $k(s)$ e $\tau(s)$ una famiglia

³Il teorema si estende analogamente al caso n -dimensionale: se al posto di \mathbb{E}^3 consideriamo \mathbb{E}^n , vi saranno $n - 1$ parametri fondamentali.

⁴Vale a dire, dove i suoi elementi sono continui.

di basi $\vec{e}(s)$.

Passo 2. Utilizzando la condizione di antisimmetria della matrice di Cartan $\Omega(s) + \Omega^T(s) = 0$ e l'ipotesi che $\vec{e}(0)$ sia ortonormata, si può dedurre che tutte le basi $\vec{e}(s)$ sono ortonormate. Se infatti così non fosse, per qualche valore di s perderemmo l'antisimmetria nella matrice $\Omega(s)$, ma ciò è assurdo (v. paragrafo 3.2).

Passo 3. Prendiamo il primo vettore della terna $\vec{e}(s)$ e chiamiamolo $\vec{t}(s)$, e definiamo una funzione $P(s)$ ponendo:

$$P(s) = P(0) + \int_0^s \vec{t}(u) du$$

Dimostriamo che $P(s)$ è la curva cercata. Anzitutto è chiaro che essendo \vec{t} di modulo unitario, allora il parametro s è il parametro arco della curva. Fatta questa identificazione, non facciamo altro che scrivere le equazioni di Frenet, identificandole con il sistema $\frac{d\vec{e}}{ds} = \Omega(s) \cdot \vec{e}(s)$. \square

3.4 Equazioni canoniche

Si chiamano **equazioni canoniche** le equazioni parametriche della curva nell'intorno di un suo punto P_0 , riferite alla terna di Frenet associata a P_0 . Tali equazioni ci danno informazioni sulla geometria locale della curva.

Lo strumento di cui abbiamo bisogno è lo sviluppo in serie di Taylor. In un intorno di P_0 , infatti si ha:

$$P(s) = P_0 + sP'_0 + \frac{1}{2}s^2P''_0 + \frac{1}{3!}s^3P'''_0 + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{s^i P_0^{(i)}}{i!} \quad (3.19)$$

Inoltre abbiamo bisogno delle espressioni delle derivate di P calcolate in P_0 (ovvero in $s = 0$), espresse in funzione della base di Frenet:

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_0 = \vec{t}_0 \\ P''_0 = k_0 \vec{n}_0 \\ P'''_0 = \frac{d}{ds}(k\vec{n}) \Big|_{s=0} = k'_0 \vec{n} - k_0^2 \vec{t}_0 + k_0 \tau_0 \vec{b}_0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Dunque:

$$P(s) = P_0 + s\vec{t}_0 + \frac{s^2}{2}k_0\vec{n}_0 + \frac{s^3}{6}(-k_0^2\vec{t}_0 + k'_0\vec{n}_0 + k_0\tau_0\vec{b}_0) + o(s^3) \quad (3.21)$$

Quindi, chiamando $X(s)$, $Y(s)$ e $Z(s)$ le coordinate del punto sulla curva rispetto alla base $(\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0)$:

$$\begin{aligned} \vec{t}_0 : & \left\{ \begin{array}{l} X(s) = s - \frac{k_0^2}{6}s^3 + o(s^3) \\ Y(s) = \frac{k_0}{2}s^2 + \frac{k_0'}{6}s^3 + o(s^3) \\ Z(s) = \frac{k_0\tau_0}{6}s^3 + o(s^3) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ciò che è importante è che in prima approssimazione, per s piccoli: $X(s) \approx s$, $Y(s) \approx s^2$, $Z(s) \approx s^3$. Dunque se andiamo a vedere (fig. 3.4) che aspetto assume la curva sul piano osculatore, sul piano rettificante, e sul piano normale troviamo che:

- La proiezione locale della curva sul piano osculatore⁵ XY (che possiamo ottenere dimenticandoci per un momento della coordinata Z) ha equazioni parametriche $\begin{cases} X(s) = s \\ Y(s) = c_1 s^2 \end{cases}$, e per eliminazione di s otteniamo $Y = c_1 X^2$, che è una parabola in X . Sul piano osculatore, dunque, localmente la curva assume la forma di una parabola.
- La proiezione locale della curva sul piano rettificante XZ è data dalle equazioni parametriche $\begin{cases} X(s) = s \\ Z(s) = c_2 s^3 \end{cases}$, e per eliminazione di s otteniamo $Z = c_2 X^3$, che è una cubica in X . Sul piano rettificante, dunque, localmente la curva assume la forma di una cubica.
- Infine, la proiezione locale della curva sul piano normale YZ è data dalle equazioni parametriche $\begin{cases} Y(s) = c_1 s^2 \\ Z(s) = c_2 s^3 \end{cases}$, e per eliminazione di s otteniamo $Z^2 = c_3 Y^3$, che è una semicubica avente nell'origine un punto singolare, una cuspide. Notiamo dunque che la proiezione locale della curva sul piano normale presenta un punto di non derivabilità, pur essendo la curva derivabile nello spazio.

⁵Infatti il piano osculatore è quello individuato dai vettori \vec{t}_0 e \vec{n}_0 , e ricordiamo che si può scrivere $P(s) = P_0 + X(s)\vec{t}_0 + Y(s)\vec{n}_0 + Z(s)\vec{b}_0$.

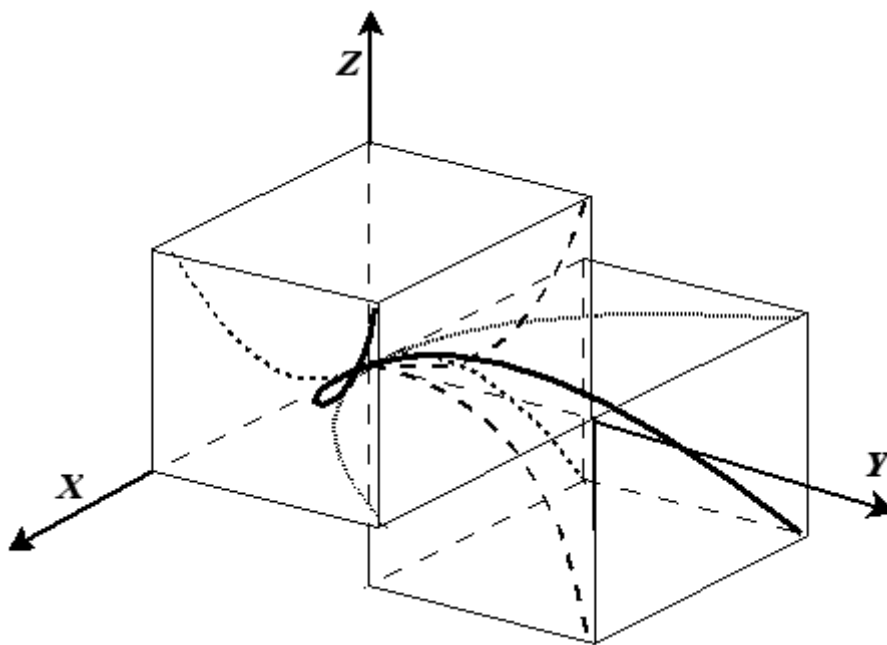


Figura 3.4: Proiezioni locali della curva sui vari piani

Parte II

Geometria locale delle superfici in \mathbb{E}^3

Capitolo 4

Introduzione

4.1 Tratti generali

Il problema che vogliamo affrontare è l'analisi locale (sempre nell'intorno puntuale) di una superficie bidimensionale immersa nello spazio euclideo, e il calcolo della sua curvatura. Vedremo che per tali superfici, la curvatura è caratterizzata da una funzione scalare K detta curvatura gaussiana. Per calcolare tale valore dovremo conoscere due forme quadratiche dette **prima forma fondamentale** e **seconda forma fondamentale**. Esse svolgeranno per le superfici il ruolo che $k(s)$ e $\tau(s)$ svolgevano nella teoria delle curve. Quindi $k(s)$ e $\tau(s)$ saranno sostituite da una famiglia di sei funzioni (i coefficienti delle due forme) nel caso delle superfici. Tali valori, tuttavia, non potranno essere dati ad arbitrio, ma dovranno soddisfare alcune opportune **condizioni di compatibilità** (che sono il nodo centrale della teoria).

I punti della teoria che intendiamo sviluppare sono perciò:

1. La prima forma fondamentale
2. La teoria della curvatura normale (di Eulero)
3. Il calcolo della curvatura normale mediante le forme fondamentali
4. La curvatura gaussiana
5. Le condizioni di compatibilità e il Theorema Egregium di Gauss.

4.2 Analisi introduttiva

4.2.1 Superfici e parametrizzazioni

Definizione 4.1. Si chiama *elemento di superficie parametrizzata* una mappa $\alpha : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ data dalle funzioni componenti:

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases} \quad (4.1)$$

Tali equazioni sono dette equazioni parametriche.

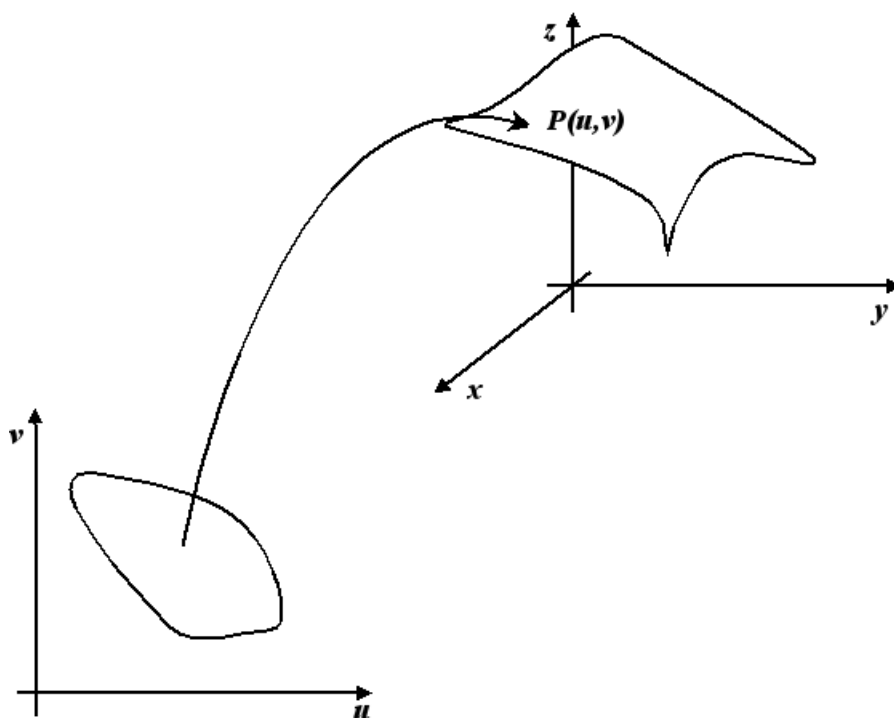


Figura 4.1: Superficie come applicazione da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3

Si suppone che quantomeno $\alpha \in \mathcal{C}^1$. Inoltre dobbiamo nuovamente imporre (come già avvenuto al paragrafo 1.1.2) una condizione di regolarità

della superficie: la matrice jacobiana di α deve avere rango massimo:

$$\operatorname{rg} J(u, v) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \quad (4.2)$$

In quest'ipotesi si dice che $\alpha : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ è un'**immersione** di D in \mathbb{E}^3 . Le superfici parametrizzate di cui ci occuperemo saranno esclusivamente immersioni di D in \mathbb{E}^3 .

L'immagine S della superficie α è detto **supporto** della superficie.

4.2.2 Piano tangente e base naturale

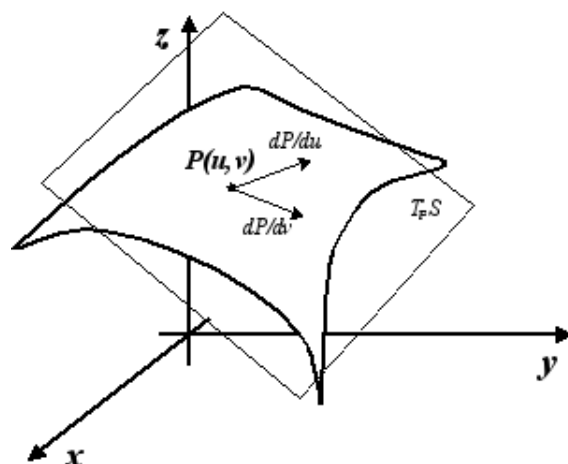


Figura 4.2: Il piano tangente e la base naturale

L'ipotesi di regolarità implica l'esistenza di un piano tangente in ogni punto di S . Questo piano (fig. 4.2) ha la proprietà di contenere i vettori tangenti a tutte le curve situate sulla superficie e passanti per il punto considerato.

Se fissiamo, sul piano uv una coordinata e lasciamo variare l'altra, otteniamo gli assi coordinati in \mathbb{R}^2 . La curva $\begin{cases} u = u_0 \\ v = v \end{cases}$ è, appunto, un asse coordinato (una retta parallela all'asse v) in \mathbb{R}^2 . La sua immagine mediante α , data da $P(u_0, v)$ è la corrispondente **linea coordinata** su S . Si tratta di una curva

regolare, quindi dotata di velocità, ossia, lungo tale curva:

$$\frac{\partial P}{\partial v}(u_0, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v)\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v)\vec{g} + \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v)\vec{k} \quad (4.3)$$

Ripetendo il ragionamento per l'asse coordinato $\begin{cases} u = u \\ v = v_0 \end{cases}$, giungiamo alla determinazione di un altro vettore velocità relativo all'altra linea coordinata su S :

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, v_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v_0)\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u, v_0)\vec{g} + \frac{\partial h}{\partial u}(u, v_0)\vec{k} \quad (4.4)$$

L'ipotesi di regolarità ci garantisce che:

- nessuno di questi due vettori è nullo (altrimenti avremmo $\text{rg}J \leq 1$);
- i due vettori non sono paralleli (altrimenti avremmo $\text{rg}J = 1$).

Dunque si ha che

$$\frac{\partial P}{\partial v} \wedge \frac{\partial P}{\partial u} \neq 0$$

e quindi i due vettori trovati formano una base sullo spazio tangente alla superficie in un suo punto. Tale base verrà detta **base naturale** associata alle coordinate (u, v) .

4.2.3 Composizione

Prendiamo ora oltre alla superficie $\alpha : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$, una curva regolare $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ nel piano delle coordinate descritte dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

Per composizione (fig 4.3) otteniamo la curva regolare:

$$\gamma = \alpha \circ \beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

che corrisponde alla restrizione della superficie lungo una curva. Abbiamo costretto le coordinate (u, v) a stare su una curva, e abbiamo ottenuto per composizione una nuova curva sulla superficie α .

La curva γ conserva la regolarità (componendo immersioni si ottengono immersioni); dunque γ è dotata di un vettore tangente \vec{v} che si ottiene mediante la regola di derivazione di funzioni composte:

$$\vec{v} = \frac{dP_\gamma}{dt} = \frac{dP_\alpha(u(t), v(t))}{dt} = \frac{\partial P_\alpha(u(t), v(t))}{\partial u} \frac{du(t)}{dt} + \frac{\partial P_\alpha(u(t), v(t))}{\partial v} \frac{dv(t)}{dt} \quad (4.5)$$

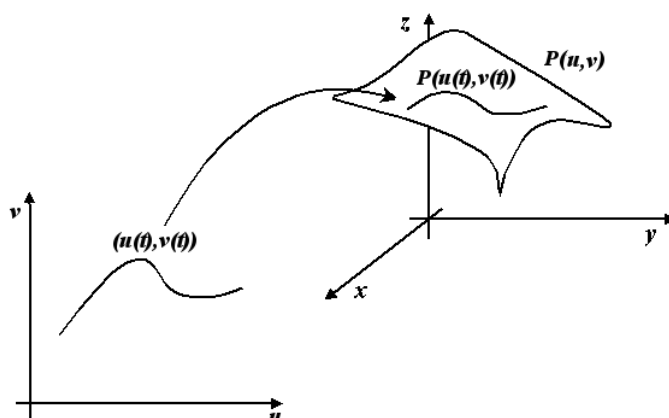


Figura 4.3: Curva su una superficie

Il vettore $\vec{v} = \frac{\partial P_\alpha}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial P_\alpha}{\partial v} \dot{v}$ è una combinazione lineare dei due vettori della base naturale, dunque giace nel piano da essi generato, vale a dire nel piano tangente. La definizione di piano tangente a un punto P , dunque, risulta appropriata dal momento che esso contiene tutti i vettori \vec{v} tangenti a qualsiasi curva passante per P . Si parla di piano tangente in P ad S , altrimenti denotato con $T_P S$.

4.2.4 Indipendenza del piano tangente dalla parametrizzazione

Nel paragrafo precedente il piano tangente è stato coerentemente definito, subordinatamente alla scelta di una parametrizzazione (u, v) . Ma che cosa succede al piano tangente se scegliamo una diversa parametrizzazione?

Definizione 4.2. Si chiama *cambio di parametrizzazione* (o cambio di **carta locale**¹) ogni applicazione Φ differenziabile e con inversa differenziabile da un aperto $D' \subset \mathbb{R}^2$ a $D \subset \mathbb{R}^2$.

In simboli:

$$\Phi : D' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} u = \varphi(u', v') \\ v = \psi(u', v') \end{cases}$$

con $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1$, e tali che esistano le inverse $\varphi', \psi' \in \mathcal{C}^1$.

L'applicazione composta $\alpha' = \alpha \circ \Phi$ è una nuova parametrizzazione di S . È ancora una parametrizzazione regolare (α' è immersione di D' in \mathbb{E}^3)

¹ D è il dominio della carta, α è la carta.

perché il determinante del differenziale non si annulla, dunque il rango della jacobiana rimane massimo:

$$\det d\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u'} & \frac{\partial\varphi}{\partial v'} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u'} & \frac{\partial\psi}{\partial v'} \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

Confrontiamo ora la base naturale associata alla parametrizzazione (u, v) con la base naturale associata alla parametrizzazione (u', v') .

$$P_{\alpha'}(u', v') = P_{\alpha}(u, v) = P_{\alpha}(\varphi(u', v'), \psi(u', v')) \quad (4.7)$$

da cui, per il teorema di derivazione di funzioni composte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\alpha'}}{\partial u'} &= \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial u'} + \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial u'} \\ \frac{\partial P_{\alpha'}}{\partial v'} &= \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v'} + \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial v'} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dall'equazione (4.8) notiamo che i vettori della base naturale relativa a (u', v') non sono altro che combinazioni lineari dei vettori della base naturale relativa a (u, v) . Tali vettori sono linearmente indipendenti per la (4.6); se ne deduce immediatamente che:

$$\text{Span}\left(\frac{\partial P_{\alpha'}}{\partial u'}, \frac{\partial P_{\alpha'}}{\partial v'}\right) = \text{Span}\left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u}, \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial v}\right) = T_P S \quad (4.9)$$

In altri termini, la base naturale è differente, ma il piano tangente è lo stesso, e dunque non dipende dalla parametrizzazione della superficie. Inoltre si ha che:

$$\frac{\partial P_{\alpha'}}{\partial u'} \wedge \frac{\partial P_{\alpha'}}{\partial v'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u'} & \frac{\partial\varphi}{\partial v'} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u'} & \frac{\partial\psi}{\partial v'} \end{vmatrix} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u} \wedge \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial v} \quad (4.10)$$

Se il determinante della matrice jacobiana di Φ è maggiore di zero, dunque, la nuova parametrizzazione preserva l'orientazione di (u, v) . Viceversa, se $\det J_{\Phi} < 0$, l'ordine di (u', v') risulta invertito rispetto all'ordine di (u, v) .

Capitolo 5

Prima forma fondamentale

5.1 Definizione

Ad ogni punto della superficie S , abbiamo visto, è associato uno spazio vettoriale bidimensionale detto spazio tangente nel punto P ad S e indicato con $T_P S$. Tale proprietà non dipende dalla parametrizzazione, dunque è una proprietà del supporto S . I vettori dello spazio tangente sono le velocità delle curve situate su S e passanti per P . Lo spazio tangente $T_P S$ è contenuto nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 , e dunque eredita il prodotto scalare canonico di \mathbb{E}^3 .

Definizione 5.1. *Si chiama **prima forma fondamentale**, e si indica con I , la restrizione del prodotto scalare di \mathbb{E}^3 su $T_P S$.*

Consideriamo due vettori \vec{p} e \vec{q} , appartenenti a $T_P S$. Dunque:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= a \frac{\partial P}{\partial u} + b \frac{\partial P}{\partial v} \\ \vec{q} &= \alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}\end{aligned}$$

Calcoliamone il prodotto scalare:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = a\alpha \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} \right) + (a\beta + b\alpha) \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \right) + b\beta \left(\frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \right)$$

Si nota che tale prodotto scalare è definito dai prodotti scalari dei vettori della base naturale. I coefficienti

$$\left\{ \begin{array}{l} E := \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} \\ F := \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \\ G := \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

sono detti coefficienti della prima forma. La forma

$$\mathbf{I}(\vec{p}, \vec{q}) = \vec{p} \cdot \vec{q} = a\alpha E + (a\beta + b\alpha)F + b\beta G \quad (5.2)$$

con $dP : T_P S \times T_P S \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma bilineare simmetrica. Dunque se come parametro introduciamo lo stesso vettore, ossia $\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w})$ otteniamo la seguente forma quadratica:

$$\mathbf{I}(\vec{w}) := \mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{w} = \alpha^2 E + 2\alpha\beta F + \beta^2 G \quad (5.3)$$

che è la forma quadratica associata a \mathbf{I} (sovente detta, in breve, anch'essa "prima forma").

I coefficienti della prima forma misurano il difetto di ortonormalità della base¹. In particolare F , il coefficiente dei termini misti, è la misura della non ortogonalità della base.

Si dice anche che E, F, G sono i coefficienti della **metrica** di una superficie e $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ è detto **tensore metrico**.

5.2 Applicazioni

A che cosa serve la prima forma \mathbf{I} ? La sua utilità primaria è quella di calcolare la lunghezza delle curve tracciate sulla superficie. Dunque \mathbf{I} svolge il ruolo che il parametro arco svolgeva nella teoria delle curve.

Ci sono due modi per mostrare la relazione tra parametro arco e prima forma fondamentale: il primo si basa sul concetto di velocità, il secondo sul concetto di distanza.

5.2.1 Velocità

Dallo studio delle curve sappiamo che la lunghezza di un tratto di curva è dato da:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} dt$$

Il vettore del piano tangente $\vec{v}(t)$ non è altro che il vettore velocità lungo una curva γ della superficie. In particolare, dato che $P_\gamma(t) = P_\alpha(u(t), v(t))$,

¹Infatti se fossimo, invece che su una superficie qualsiasi, su \mathbb{E}^2 , il prodotto scalare tra due vettori qualunque sarebbe $\vec{p} \cdot \vec{q} = a\alpha + b\beta$, con dunque $E = G = 1$, $F = 0$.

si ha²:

$$\vec{v}(t) = \frac{dP_\gamma(t)}{dt} = \dot{u} \frac{\partial P_\alpha}{\partial u} + \dot{v} \frac{\partial P_\alpha}{\partial v} \quad (5.4)$$

Dunque abbiamo che:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mathbf{I}(\vec{v})} dt \quad (5.5)$$

dove con $\mathbf{I}(\vec{v}) := \mathbf{I}(\vec{v}, \vec{v})$ intendiamo la prima forma valutata sul vettore (\vec{v}, \vec{v}) - vale a dire: i due vettori dati in ingresso alla forma quadratica \mathbf{I} coincidono, e corrispondono a $\vec{v} = (\dot{u}, \dot{v})$.

5.2.2 Distanza

Consideriamo nello spazio un punto P di coordinate (x, y, z) e un punto $P + dP$ di coordinate $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Non è difficile calcolare la distanza euclidea tra questi due punti, è sufficiente applicare il Teorema di Pitagora:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Imponiamo ora che P e $P + dP$ giacciono sul supporto della superficie α :

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases} \text{ e troviamo la restrizione di } ds^2 \text{ su } S:$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= df(u, v)^2 + dg(u, v)^2 + dh(u, v)^2 \\ ds^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv \right)^2 \\ ds^2 &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + 2 \left[\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} \right] dudv + \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2 \quad (5.6) \end{aligned}$$

L'equazione (5.6) mostra che restringendo ds^2 su S ottengo una forma quadratica in (du, dv) detta la **metrica** della superficie. Mostriamo che ciò è coerente con quanto avevamo affermato precedentemente, ossia che i coefficienti

²Si noti dall'equazione (5.4) che la base naturale è detta così proprio perché il vettore velocità ha come componenti lungo di essa proprio le derivate delle componenti u e v rispetto a t . Il vettore velocità della curva nel piano (u, v) e il vettore velocità della sua immagine su S mantengono dunque le stesse coordinate, solamente rispetto a due basi diverse.

della prima forma E, F, G sono i coefficienti della metrica della superficie. Il passo fondamentale è notare che questa metrica ds^2 non è nient'altro che la prima forma valutata sullo spostamento infinitesimo³ (dP, dP) , ovvero che⁴:

Teorema 5.1.

$$ds^2 = \mathbf{I}(dP, dP)$$

Dimostrazione. Infatti, dato che $P = f(u, v)\vec{i} + g(u, v)\vec{j} + h(u, v)\vec{k}$ (equazione vettoriale della superficie), si ha che:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\vec{k} \\ \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\vec{k} \end{cases}$$

e dunque, per come avevamo definito i coefficienti nel paragrafo 5.1:

$$\begin{cases} E := \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial u} \\ F := \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} \\ G := \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial v} \end{cases}$$

che sono proprio i coefficienti presenti nella tesi del teorema. Dunque, avendo coefficienti uguali, $ds^2 = \mathbf{I}(dP, dP)$. \square

5.2.3 Area

Un'altra applicazione utile della prima forma è nel calcolo dell'area della superficie relativa a un dominio Ω nel piano (u, v) . Detta α la superficie, chiamata $A[X]$ la funzione che associa a ogni dominio X nel piano delle coordinate l'area della regione di superficie $\alpha(\Omega)$ individuata da tale dominio, si ha che⁵:

³Differenziando P , abbiamo che $dP = \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv$, e dunque, visto in coordinate rispetto alla base naturale, $dP = (du, dv)$.

⁴Brutalmente e con abuso di linguaggio, talvolta si dice che \mathbf{I} e ds sono la stessa forma.

⁵Mentre la lunghezza di una curva può essere definita come il limite della lunghezza delle poligonali all'infittirsi dei punti, si può dimostrare che un analogo procedimento di tassellazione non funzionerebbe per le superfici, poiché non tenderebbe ad alcun limite finito.

Teorema 5.2.

$$A[R] = \iint_{\Omega} \sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} dudv = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che l'elemento infinitesimo di area si dilata di un fattore pari a $\sqrt{EG - F^2}$. Per far ciò, consideriamo un rettangolo infinitesimo nel piano (u, v) di lati du e dv . La mappa α ha l'effetto di produrre una deformazione della piastrina elementare (du, dv) ; tale deformazione è composta da uno **scorrimento** che cambia gli angoli e da una **dilatazione** lungo i lati. Nell'approssimazione lineare, ossia quando utilizziamo il differenziale della mappa α in luogo della mappa stessa, il rettangolo $(du \cdot \vec{i}, dv \cdot \vec{j})$ si trasforma in un parallelogramma di lati $(\frac{\partial P}{\partial u} du, \frac{\partial P}{\partial v} dv)$ (si noti che le coordinate non sono cambiate, semplicemente è stata sostituita alla base fissa dei versori del piano, la base naturale). L'area della piastrina elementare verrà dunque dilatata di conseguenza: da $dudv$ (prima della trasformazione) alla norma del prodotto vettoriale dei nuovi lati del parallelogramma (per una nota proprietà del prodotto vettoriale). Dunque:

$$\text{Area parallelogramma} = \left\| \frac{\partial P}{\partial u} du \wedge \frac{\partial P}{\partial v} dv \right\| = \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\| dudv$$

da cui si evince che il fattore di dilatazione è proprio la norma del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\| &= \sqrt{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|^2} = \sqrt{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial P}{\partial v} \right\|^2 \cdot \sin^2 \theta} = \\ &= \sqrt{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial P}{\partial v} \right\|^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta)} = \sqrt{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial P}{\partial v} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial P}{\partial v} \right\|^2 \cos^2 \theta} = \\ &= \sqrt{\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} \right)^2} = \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

e ci siamo. \square

Esempio: sfera. Consideriamo una sfera S^2 con centro nell'origine⁶; la parametrizzazione più comune per tale sfera è quella che sfrutta le proprietà di simmetria sferica, introducendo come parametri due angoli φ e θ , detti

⁶In generale indicheremo con S^n una superficie sferica di dimensione n in uno spazio $n+1$ -dimensionale, dunque S^0 è un punto, S^1 è una circonferenza, S^2 la comune superficie sferica, S^3 la sfera tridimensionale in uno spazio a più di tre dimensioni, e così via.

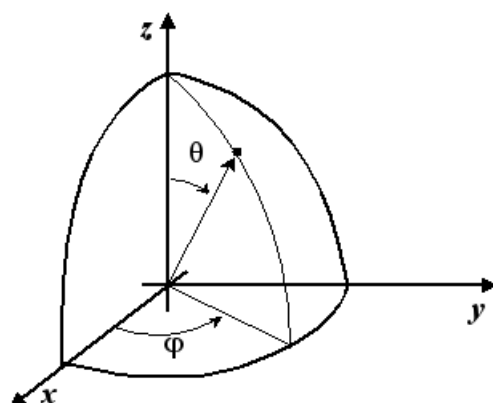


Figura 5.1: La sfera e le sue coordinate

rispettivamente **longitudine** e **colatitudine**⁷. La longitudine è l'angolo che la proiezione del segmento orientato \overrightarrow{OP} sul piano xy descrive con l'asse x ; la colatitudine è l'angolo che il segmento orientato \overrightarrow{OP} descrive con l'asse z . Facendo variare $\varphi \in (0, 2\pi)$ e $\theta \in (0, \pi)$ riusciamo a ricoprire quasi l'intera superficie, con l'eccezione di una piccola strisciolina corrispondente a longitudine 0, che si estende fino a comprendere i due poli. Insomma, tale parametrizzazione non dà propriamente la sfera, ma non riesce a ricoprire i due poli e un semicerchio massimo. Si noti che se imponessimo di ricoprirli, il cambiamento di coordinate non sarebbe più una biezione, poiché esisterebbero punti (ad esempio i poli) cui corrisponderebbero diverse configurazioni della coppia di parametri (θ, φ) .

A questo punto bastano poche nozioni di trigonometria per determinare come si scrivono le coordinate (x, y, z) del punto sulla sfera in funzione dei nuovi parametri (θ, φ) ; la parametrizzazione della sfera S^2 di raggio R risulta dunque:

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases} \quad (5.7)$$

Determiniamo ora le linee coordinate. Consideriamo nel piano (θ, φ) una retta parallela all'asse φ , vale a dire, fissiamo un valore di $\theta = \theta_0$. Abbiamo identificato una curva (una retta) sul piano dei parametri: mediante l'applicazione α , tale curva avrà come immagine una nuova curva sulla superficie

⁷Si noti l'analogia con la consueta rappresentazione di un punto sulla superficie terrestre nelle carte geografiche, dove, tuttavia, al posto della colatitudine si sceglie di utilizzare il suo complementare, la **latitudine**, che dunque è nulla all'equatore e massima ai poli.

S^2 . Vediamo che forma assume questa curva:

$$P(\theta_0, \varphi) = \begin{cases} x = R \sin \theta_0 \cos \varphi = k_1 \cos \varphi \\ y = R \sin \theta_0 \sin \varphi = k_1 \sin \varphi \\ z = R \cos \theta_0 = k_2 \end{cases}$$

Tali equazioni mi identificano, per ogni θ_0 fissato, le linee coordinate, che sono, nello specifico, circonferenze giacenti su piani paralleli al piano xy e di raggio $k_1 = R \sin \theta_0$. Analogamente si trova che, fissando $\varphi = \varphi_0$:

$$P(\theta, \varphi_0) = \begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi_0 = k_3 \sin \theta \\ y = R \sin \theta \sin \varphi_0 = k_4 \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

Troviamo i vettori della base naturale. Per fare ciò calcoliamoci innanzitutto le derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \theta} = R \cos \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = R \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = -R \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -R \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = R \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

I vettori della base naturale sono i vettori aventi per componenti tali derivate prime:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= R \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + R \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - R \sin \theta \vec{k} \\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= -R \sin \theta \sin \varphi \vec{i} + R \sin \theta \cos \varphi \vec{j} \end{aligned}$$

Calcoliamoci la prima forma come restrizione del prodotto scalare sullo spazio tangente $T_P S$. $\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}, \frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)$ sono una base per $T_P S$, dunque due qualsiasi vettori \vec{u} e \vec{v} si possono scrivere come:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} + u_\varphi \frac{\partial P}{\partial \varphi} \\ \vec{v} &= v_\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} + v_\varphi \frac{\partial P}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Facendo ereditare a $T_P S$ il prodotto scalare di \mathbb{E}^3 , si ha che il prodotto scalare di \vec{u} e \vec{v} (vale a dire la prima forma) è dato da:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_\theta v_\theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + (u_\theta v_\varphi + u_\varphi v_\theta) \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + u_\varphi v_\varphi \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\partial P}{\partial \varphi}$$

dunque i coefficienti di \mathbf{I} sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \left\| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right\|^2 = R^2(\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = R^2 \\ F = \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = R^2(-\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \cos \theta) = 0 \\ G = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \left\| \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right\|^2 = R^2(\sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) = R^2 \sin^2 \theta \end{array} \right.$$

Calcoliamoci la metrica ds^2 della superficie S^2 :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Ma:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = R \cos \theta \cos \varphi d\theta - R \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\ dy = R \cos \theta \sin \varphi d\theta + R \sin \theta \cos \varphi d\varphi \\ dz = -R \sin \theta d\theta \end{array} \right.$$

e dunque:

$$ds^2 = R^2[(\cos \theta \cos \varphi d\theta - \sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 + (\cos \theta \sin \varphi d\theta + \sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 + (-\sin \theta d\theta)^2]$$

$$ds^2 = R^2[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.8)$$

che è la metrica della superficie sferica.

Calcoliamo la lunghezza L del parallelo corrispondente a colatitudine $\theta = \frac{\pi}{4}$ con l'equazione (5.5):

$$\begin{aligned} L &= \int \sqrt{ds^2} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sqrt{R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2} \Big|_{\theta=\pi/4} = \\ &= R \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sqrt{0 + \frac{1}{2} d\varphi^2} = R \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = \pi R \sqrt{2} \end{aligned}$$

Allo stesso risultato potevamo arrivare osservando che tale parallelo è una circonferenza di raggio

$$R \sin \theta \Big|_{\theta=\pi/4} = R \sin \frac{\pi}{4} = R \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e dunque la lunghezza di tale circonferenza vale $2\pi R \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi R \sqrt{2}$.

Capitolo 6

Curvatura e seconda forma

Vogliamo ora definire uno strumento in grado di dirci qualcosa circa la curvatura di una superficie in un suo punto P . Vi sono due strade per affrontare l'argomento, ed entrambe le strade portano alla medesima soluzione: la strada percorsa da Eulero fa uso della nozione di curvatura delle linee che giacciono su S (per calcolare la curvatura di una superficie in un suo punto P ci si riduce alla curvatura delle linee che giacciono su S e che passano per tale punto); la strada percorsa da Gauss sfrutta invece la variabilità della normale mediante l'immagine sferica della superficie costruita con la mappa di Gauss¹: $P \rightarrow \vec{N}(P)$. Vedremo più in dettaglio successivamente questa seconda strada, per il momento seguiamo la strada percorsa da Eulero.

6.1 Metodo euleriano: curvatura normale e curvatura gaussiana

Sia $P_\gamma(s)$ il generico punto di una curva γ su S parametrizzata con il suo parametro arco, calcolabile lasciando variare liberamente il secondo estremo nell'integrale dell'equazione (5.5). Detto \vec{t}_γ il vettore tangente alla curva, γ ha un vettore curvatura

$$\vec{k}(s) := \frac{d\vec{t}_\gamma}{ds} = \frac{d^2 P_\gamma(s)}{ds^2}$$

Il punto è che, mentre nel caso di una curva nel piano, il vettore curvatura giace anch'esso nel piano della curva, per una generica curva su una superficie, in generale, $\vec{k} \notin T_P S$, ovvero il vettore curvatura in un punto non appartiene al piano tangente al punto. L'idea è che la componente tangenziale

¹La normale alla superficie verrà indicata con \vec{N} .

di questo vettore sia propria della curva, mentre la parte normale di questo vettore sia dovuta alla superficie, e dunque manifestazione della curvatura della superficie². Per questo introduciamo la seguente definizione:

Definizione 6.1. Si chiama **curvatura normale** di una curva γ giacente su S e passante per P , la componente normale del vettore curvatura di γ in P . In simboli:

$$k_N^\gamma := \vec{N} \cdot \frac{d\vec{t}_\gamma}{ds}$$

La curvatura normale in un punto dipende sensibilmente dalla curva γ che scelgo passare per tale punto. Per completezza (ci servirà più avanti) diamo anche un'altra definizione:

Definizione 6.2. Si chiama **curvatura geodetica** di una curva γ giacente su S e passante per P , la componente tangente del vettore curvatura di γ in P .

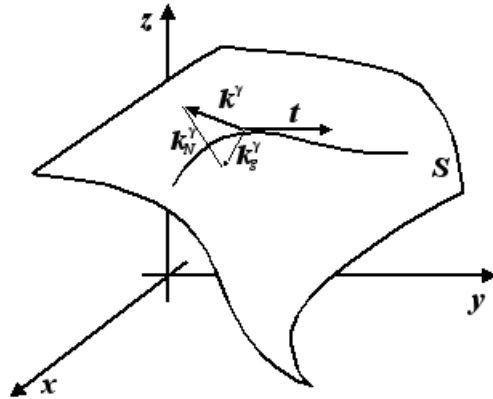


Figura 6.1: Curvatura normale e curvatura geodetica

Teorema 6.1. L'insieme delle curvature normali $\{k_N\}$ in un punto dipende da un solo parametro.

Dimostrazione. Fissiamo un punto P_0 su S . Iniziamo con il mostrare che tutte le curve γ che sono tra loro tangenti in P_0 hanno la stessa curvatura

²Tale idea non è affatto peregrina: se la superficie degenera in un piano, intuitivamente la sua curvatura è nulla; infatti in ogni punto di ogni curva \vec{k} non ha componente perpendicolare. Per estensione, non è assurdo pensare che sia proprio la parte perpendicolare a essere legata alla curvatura della superficie.

normale; infatti (per parti, con la regola di Leibniz):

$$k_N^\gamma := \vec{N} \cdot \frac{d\vec{t}_\gamma}{ds} = -\vec{t}_\gamma \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} + \frac{d}{ds}(\vec{N} \cdot \vec{t}_\gamma) = -\vec{t}_\gamma \cdot \frac{d\vec{N}}{ds}$$

poiché $\vec{N} \cdot \vec{t}$ è nullo, dato che i due vettori sono perpendicolari. Dato che la derivata $\frac{d\vec{N}}{ds}$ non dipende dalla curva scelta, ma soltanto dalla superficie, tale formula mostra che:

- se due curve hanno in P uguale vettore tangente, allora hanno anche uguale curvatura normale (in altri termini: k_N dipende solo da un parametro: la tangente);
- k_N è legata alla variabilità di \vec{N} nell'intorno del punto P considerato³.

□

Tra tutte le curve passanti per un punto, ce ne sono alcune che hanno una proprietà particolare, quella di essere ottenute mediante l'intersezione della superficie con un piano ad essa normale.

Definizione 6.3. Si chiama **sezione normale** la sezione di S ottenuta tagliando S con un piano ad essa normale.

Sostanzialmente, in ogni punto P è definito il versore \vec{N} perpendicolare alla superficie. Per tale direzione passa un fascio di piani, detti sezioni normali. Tali sezioni normali, per il teorema precedente, sono rappresentative di un'intera classe di equivalenza di curve tangenti: presa una curva qualsiasi con un certo versore tangente \vec{t} , la sua curvatura normale k_N sarà uguale alla curvatura normale della sezione normale avente lo stesso versore tangente \vec{t} . La curvatura normale è quindi una funzione definita sulla circonferenza unitaria S^1 che giace nel piano tangente: a ogni direzione in questa circonferenza è associato un valore di k_N .

Essendo la circonferenza unitaria S^1 un compatto, per il Teorema di Weierstrass, k_N ammette massimo e minimo in S^1 . Sia k_{MAX} il massimo e k_{MIN} il minimo. Questi valori, ossia la curvatura massima e minima al variare della sezione normale, sono detti **curvature principali**.

Definizione 6.4. Si chiama **curvatura gaussiana** K della superficie α nel punto $P_0 \in S$ il prodotto delle curvature principali:

$$K = k_{MIN} \cdot k_{MAX}$$

³Si noti che se $\frac{d\vec{N}}{ds} = 0 \Rightarrow k_N = 0$: dunque la curvatura normale è un buon oggetto per stimare la curvatura di una superficie.

Esempio: curvatura gaussiana del cilindro Preso un punto sulla superficie laterale del cilindro, una sezione normale si comporta localmente come un arco di elica cilindrica, e dalla (3.16) deduciamo, in questo caso, che $0 \leq k_N \leq \frac{1}{R}$. Dunque $k_{MIN} = 0$, $k_{MAX} = \frac{1}{R}$, da cui $K = k_{MIN} \cdot k_{MAX} = 0$.

6.2 Seconda forma fondamentale

Calcoliamoci ora i valori della curvatura, una volta note le equazioni parametriche della superficie:

$$P_\alpha = P_\alpha(u, v)$$

e della curva (supponiamo di parametrizzare la curva mediante l'arco⁴):

$$u = u(s), \quad v = v(s)$$

Calcoliamoci innanzitutto la curvatura $\vec{k} = \frac{d^2P}{ds^2}$. La curva γ è una funzione composta:

$$P_\gamma(s) = P_\alpha(u(s), v(s))$$

applichiamo quindi il teorema di derivazione di funzione composta:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{dv}{ds}$$

e otteniamo la solita rappresentazione del versore tangente sulla base naturale. Ora deriviamo nuovamente rispetto a s , riapplicando al secondo passaggio la regola di Leibniz:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right) \frac{du}{ds} + \frac{\partial P}{\partial u} \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right) \frac{dv}{ds} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{d^2v}{ds^2} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{dv}{ds} \right) \frac{du}{ds} + \frac{\partial P}{\partial u} \frac{d^2u}{ds^2} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \right) \frac{dv}{ds} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{d^2v}{ds^2} = \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{\partial P}{\partial u} \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{d^2v}{ds^2} \quad (6.1) \end{aligned}$$

⁴Si badi bene che se s è arco per la curva $(u(s), v(s))$ giacente sul piano (u, v) in generale non sarà parametro arco per la curva $P(u(s), v(s))$ giacente sul supporto S della superficie α . È fondamentale fissare le idee: qui s è parametro arco della curva iniziale $(u(s), v(s))$, non della curva trasformata dalla funzione α . Ciò significa che il vettore velocità $\vec{t} = \left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds} \right) = (u'(s), v'(s))$ della curva originaria $(u(s), v(s))$ sarà unitario, mentre il vettore velocità $\vec{\tilde{t}} = \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{du}{ds}, \frac{\partial P}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right)$ della curva trasformata giacerà sul piano tangente alla superficie (essendo combinazione lineare dei vettori della base naturale), ma non sarà in generale unitario rispetto alla base fissa $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Quello che si può però dire, è che esso sarà un versore (ossia sarà unitario) considerato come vettore di componenti u' e v' rispetto alla base naturale (è bene sottolineare nuovamente il ruolo fondamentale giocato dalla scelta della base naturale).

Dato che $k_N = \vec{N} \cdot \frac{d^2P}{ds^2}$, nell'operazione di prodotto scalare gli ultimi due termini dell'espressione trovata nella (6.1) non contribuiscono. Infatti, dal momento che essi sono combinazione lineare dei vettori della base naturale, giacciono nel piano tangente, e dunque sono perpendicolari a \vec{N} . Si ha quindi che, in definitiva:

$$k_N = \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \right) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \right) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \quad (6.2)$$

L'espressione precedente mostra che k_N è una forma quadratica delle derivate prime di u e v rispetto ad s (il processo di normalizzazione ha eliminato le derivate seconde che si erano venute a creare). In altre parole, k_N è funzione quadratica di \vec{t} : tale funzione è la funzione quadratica associata alla **seconda forma fondamentale** (che sovente viene chiamata a sua volta “seconda forma”). Tale forma fondamentale, che in genere si indica con **II**, calcolata in due generici vettori dello spazio tangente $\vec{p} = a \frac{\partial P}{\partial u} + b \frac{\partial P}{\partial v}$ e $\vec{q} = \alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}$ è dunque:

$$k_N = a\alpha \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \right) + (a\beta + b\alpha) \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \right) + b\beta \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right) \quad (6.3)$$

Per analogia con il Teorema 5.1, possiamo scrivere che in ogni punto P :

$$k_N = \mathbf{II}(\vec{t}, \vec{t}) \quad (6.4)$$

o anche, più semplicemente, $k_N = \mathbf{II}(\vec{t})$, dove con \vec{t} intendiamo il vettore velocità in P . Così come la **I** forniva l'arco in funzione dello spostamento infinitesimo, la **II** nasce spontaneamente dallo studio della curvatura normale. Prendiamo una curva giacente sulla superficie, prendiamone il suo vettore tangente \vec{t} : la seconda forma risulta funzione di questo \vec{t} , al variare delle curve che passano per un punto fissato P . Al contrario, i coefficienti della **II** non dipendono da \vec{t} (e quindi dalla curva), bensì sono funzioni del punto fissato P . Dunque in **II** osserviamo una netta divisione in due fattori che scindono la parte che compete alla curva (gli argomenti) dalla parte che compete alla superficie (i coefficienti). Indipendentemente dalla curva, per ogni P fissato, possiamo allora definire i coefficienti della seconda forma fondamentale, per i quali (per distinguerli dai coefficienti della prima forma) useremo le lettere minuscole:

$$\left\{ \begin{array}{l} e := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \\ f := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \\ g := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \end{array} \right. \quad (6.5)$$

La formula della curvatura normale (6.2) mostra quindi in forma separata la dipendenza di k_N da S tramite i coefficienti e da γ tramite le componenti della tangente.

Esempio: calcolo di II. Calcoliamo la seconda forma fondamentale della superficie:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$$

Abbiamo che:

$$\frac{\partial P}{\partial u} : \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \cos v \\ \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v \\ \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial P}{\partial v} : \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v \\ \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v \\ \frac{\partial z}{\partial v} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} : \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} : \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\sin v \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \cos v \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} : \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -u \cos v \\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -u \sin v \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \end{cases}$$

inoltre:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \text{vers}\left(\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}\right) = \text{vers}\left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix}\right) = \\ &= \text{vers}(\sin v \vec{i} - \cos v \vec{j} + u \vec{k}) = \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}} \vec{i} - \frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}} \vec{j} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \vec{k} \end{aligned}$$

da cui, in virtù della (6.5), ricaviamo immediatamente i coefficienti della seconda forma:

$$\begin{cases} e := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = 0 \\ f := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = -\frac{\sin^2 v}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{\cos^2 v}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ g := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = -\frac{u \cos v \sin v}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{u \cos v \sin v}{\sqrt{1+u^2}} = 0 \end{cases}$$

6.2.1 Calcolo dei coefficienti di II in notazione scalare

È facile passare dalla notazione vettoriale alla notazione scalare per il calcolo dei coefficienti della seconda forma. Infatti se ho la parametrizzazione $P(u, v)$ della superficie, ho anche i vettori della base naturale di $T_P S$; per ottenere un vettore normale mi basta fare il loro prodotto vettoriale. Tuttavia tale vettore non sarà in generale unitario, dunque va diviso per la sua norma. Si ha quindi che:

$$\left\{ \begin{array}{l} e := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \\ f := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \\ g := \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \end{array} \right.$$

Ma $\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|$ non è altro che l'elemento d'area, che per quanto visto nel

Teorema 5.2, vale $\sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \sqrt{EG - F^2}$. Dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \\ f = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \\ g = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

dove i coefficienti E, F, G sono i coefficienti della prima forma fondamentale. Si noti che così il tutto è calcolabile meccanicamente a partire dalla funzione $P(u, v)$. Si noti anche che il numeratore delle equazioni (6.5) è un prodotto

misto (vettoriale tra i vettori della base naturale e poi scalare con una derivata seconda); applicando la nota formula del prodotto misto possiamo dunque riscrivere il tutto nel seguente modo⁵:

$$e = \frac{\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/\partial u^2 & \partial^2 y/\partial u^2 & \partial^2 z/\partial u^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$f = \frac{\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/(\partial u \partial v) & \partial^2 y/(\partial u \partial v) & \partial^2 z/(\partial u \partial v) \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (6.7)$$

$$g = \frac{\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/\partial v^2 & \partial^2 y/\partial v^2 & \partial^2 z/\partial v^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Questa è la forma più diretta per calcolare i coefficienti della **II** a partire dalle equazioni parametriche di γ .

⁵Si noti che, per ciascun coefficiente, nella matrice del prodotto misto, le derivate seconde dovrebbero comparire nella prima riga (è l'elemento del prodotto scalare), le derivate rispetto a u nella seconda riga e le derivate rispetto a v nell'ultima riga. Tuttavia, per una nota proprietà, il determinante di una matrice non cambia operando un numero pari di scambi di righe (a ogni scambio di righe il determinante cambia segno). E dunque, ad esempio, per il coefficiente e :

$$e = \begin{vmatrix} \partial^2 x/\partial u^2 & \partial^2 y/\partial u^2 & \partial^2 z/\partial u^2 \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial^2 x/\partial u^2 & \partial^2 y/\partial u^2 & \partial^2 z/\partial u^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/\partial u^2 & \partial^2 y/\partial u^2 & \partial^2 z/\partial u^2 \end{vmatrix}$$

Analogamente avviene per gli altri coefficienti.

6.2.2 Curvatura normale per parametrizzazione arbitraria

Per concludere possiamo generalizzare le formule, passando dal parametro arco⁶ ad un parametro arbitrario t . Abbiamo che:

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{u} \frac{1}{w}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{v} \frac{1}{w}$$

dove w è la velocità⁷ di cui, cambiando parametrizzazione, bisogna rendere conto. Pertanto:

$$\begin{aligned} k_N &= e \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2f \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + g \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = \frac{e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2}{\vec{w} \cdot \vec{w}} = \\ &= \frac{e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} = \frac{\mathbf{II}(\vec{w}, \vec{w})}{\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w})} \quad (6.8) \end{aligned}$$

dal momento che il prodotto scalare del vettore \vec{w} per se stesso è dato da $\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w})$. Il denominatore $\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w})$ serve per la normalizzazione. Se scegliamo, infatti al posto di t il parametro arco, abbiamo infatti che $\vec{w} = \vec{t}$ e, dato che $\vec{t} \cdot \vec{t} = 1$, otteniamo:

$$k_N(\vec{t}) = \mathbf{II}(\vec{t}, \vec{t})$$

Si dimostra il seguente enunciato:

Proposizione 6.2. *La somma di curvatures normali relative a direzioni ortogonali è costante.*

Dimostrazione. Consideriamo una generica curva γ su S , avente equazione $P(u(s), v(s))$, con s parametro arco per $(u(s), v(s))$. Il suo vettore tangente in P è:

$$\vec{t} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{dv}{ds}$$

Tale vettore ha componenti $(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds})$ sulla base naturale; d'altro canto essendo s l'arco per la curva $(u(s), v(s))$, si ha che $(\frac{du}{ds})^2 + (\frac{dv}{ds})^2 = 1$, da cui si deduce che \vec{t} è un versore rispetto alla base naturale $(\frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v})$.

Consideriamo poi un'altra curva $\bar{\gamma}$ che abbia velocità unitaria rispetto alla

⁶Non è superfluo ribadire il concetto già esposto alla nota 4 di questo capitolo: s è il parametro arco per la curva $(u(s), v(s))$, la cui velocità $\sqrt{u' + v'}$ sarà unitaria.

⁷Viene usata la lettera w per evitare il conflitto di notazioni con il parametro v .

base naturale e perpendicolare al vettore \vec{t} . La scelta non è unica, ma abbiamo due opzioni per tale vettore tangente: per fissare le idee scegliamo il vettore

$$\vec{t} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial P}{\partial v} \left(-\frac{du}{ds} \right)$$

che è unitario rispetto alla base naturale ed è palesemente perpendicolare al vettore \vec{t} . (Il ragionamento è del tutto analogo una volta scelto l'altro vettore $\vec{\bar{t}} = \frac{\partial P}{\partial u} \left(-\frac{dv}{ds} \right) + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{du}{ds}$.)

Sappiamo dal Teorema 6.1 che le curve γ e $\bar{\gamma}$ sono rappresentative anche per tutte le altre curve aventi in P medesima direzione tangente. In altre parole, ci basta dimostrare che la perpendicolarità dei due vettori tangenti \vec{t} e $\vec{\bar{t}}$ forza la somma delle curvatures normali di γ e $\bar{\gamma}$ a essere costante.

Per far ciò andiamo a riprendere la formula usata nel Teorema 6.1:

$$k_N^\gamma = -\vec{t}_\gamma \cdot \frac{d\vec{N}}{ds}$$

Dette k_N e \bar{k}_N rispettivamente le curvatures normali di γ e $\bar{\gamma}$, in virtù dell'equazione (6.4) possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} k_N + \bar{k}_N &= \mathbf{II}(\vec{t}, \vec{t}) + \mathbf{II}(\vec{\bar{t}}, \vec{\bar{t}}) = \left[e \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2f \left(\frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \right) + g \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right] + \\ &+ \left[e \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + 2f \left(\frac{dv}{ds} \left(-\frac{du}{ds} \right) \right) + g \left(-\frac{du}{ds} \right)^2 \right] = \left[\left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right] (e + g) \end{aligned}$$

Ma $\left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ altro non è che il quadrato della norma di \vec{t} visto come vettore rispetto alla base naturale. Dato che rispetto a tale scelta di base \vec{t} è unitario, si ha immediatamente che $\left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 1$, da cui, in definitiva:

$$k_N + \bar{k}_N = e + g$$

e dall'indipendenza di e e g dalla curva scelta (essi dipendono unicamente dal punto sulla superficie) segue la tesi. \square

Esempio: superfici di rotazione. Partendo dal caso della sfera, vediamo di estendere la scrittura delle equazioni parametriche per una qualsiasi superficie di rotazione.

Consideriamo il caso della sfera di raggio R : se fissiamo un punto su un meridiano (φ fissata), per individuarne la posizione abbiamo bisogno di un angolo θ che ne determini la colatitudine. Detta r la distanza di P dall'asse di rotazione, sussiste che:

$$r = R \sin \theta \quad (\text{distanza dall'asse})$$

$$z = R \cos \theta \quad (\text{quota})$$

Da r si può poi risalire alle altre coordinate x e y , facendo ricorso alla longitudine φ :

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Rinominiamo le variabili (θ, φ) come (u, v) ed estendiamo le funzioni trovate a un caso più generale, con funzioni h e g arbitrarie ad assumere il ruolo di distanza e quota:

$$\begin{aligned} r &= h(u) \\ z &= g(u) \\ x &= r \cos v = h(u) \cos v \\ y &= r \sin v = h(u) \sin v \end{aligned} \quad (6.9)$$

La funzione h dà conto della distanza dall'asse z di rotazione, la funzione g dà conto della quota dal piano di riferimento xy .

Quando questa superficie è regolare? Quando la matrice dei vettori della base naturale ha rango massimo (pari a 2). Dunque, dato che

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u} &= h'(u) \cos v \vec{i} + h'(u) \sin v \vec{j} + g'(u) \vec{k} \\ \frac{\partial P}{\partial v} &= -h(u) \sin v \vec{i} + h(u) \cos v \vec{j} \end{aligned}$$

la condizione di regolarità è che

$$\text{rg} \begin{pmatrix} h'(u) \cos v & h'(u) \sin v & g'(u) \\ -h(u) \sin v & h(u) \cos v & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad (6.10)$$

Il rango non diminuisce se e solo se i suoi minori di ordine due non si annullano contemporaneamente. Deve dunque essere che

$$\begin{aligned} m_1 &= \begin{vmatrix} h'(u) \cos v & h'(u) \sin v \\ -h(u) \sin v & h(u) \cos v \end{vmatrix} = h(u)h'(u) \\ m_2 &= \begin{vmatrix} h'(u) \cos v & g'(u) \\ -h(u) \sin v & 0 \end{vmatrix} = h(u)g'(u) \sin v \\ m_3 &= \begin{vmatrix} h'(u) \sin v & g'(u) \\ h(u) \cos v & 0 \end{vmatrix} = -h(u)g'(u) \cos v \end{aligned}$$

non si annullino contemporaneamente. Per far ciò imponiamo che la somma $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ sia sempre maggiore di zero (sarebbe infatti zero se e solo se tutti e tre i minori si annullassero). Si ha:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = h^2(u)(h'^2(u) + g'^2(u)) > 0 \quad (6.11)$$

e ciò sussiste se e solo se:

$$h'^2(u) + g'^2(u) > 0 \text{ e } h \neq 0 \quad (6.12)$$

che sono le condizioni di regolarità cercate; si noti che la prima condizione chiede il non annullarsi contemporaneo delle derivate di h e g .

Calcoliamoci i coefficienti della prima e della seconda forma per queste superfici di rotazione. Si ha:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = h(u) \cos v \\ y = h(u) \sin v \\ z = g(u) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = h'(u) \cos v \\ \frac{\partial y}{\partial u} = h'(u) \sin v \\ \frac{\partial z}{\partial u} = g'(u) \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v} = -h(u) \sin v \\ \frac{\partial y}{\partial v} = h(u) \cos v \\ \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = h''(u) \cos v \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = h''(u) \sin v \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = g''(u) \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -h'(u) \sin v \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = h'(u) \cos v \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -h(u) \cos v \\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -h(u) \sin v \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e dunque i coefficienti della prima forma sono:

$$E = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = h'^2(u) + g'^2(u)$$

$$F = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$G = \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = h^2(u)$$

Inoltre si ha che $\sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \sqrt{EG - F^2} = h(u) \sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}$, grazie a cui ricaviamo i coefficienti della seconda forma:

$$\begin{aligned} e &:= \frac{\begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial y / \partial u & \partial z / \partial u \\ \partial x / \partial v & \partial y / \partial v & \partial z / \partial v \\ \partial^2 x / \partial u^2 & \partial^2 y / \partial u^2 & \partial^2 z / \partial u^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} h'(u) \cos v & h'(u) \sin v & g'(u) \\ -h(u) \sin v & h(u) \cos v & 0 \\ h''(u) \cos v & h''(u) \sin v & g''(u) \end{vmatrix}}{h(u) \sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}} = \\ &= \frac{g''(u)h'(u) - g'(u)h''(u)}{\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}} \end{aligned}$$

$$f := \frac{\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/(\partial u \partial v) & \partial^2 y/(\partial u \partial v) & \partial^2 z/(\partial u \partial v) \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} h'(u) \cos v & h'(u) \sin v & g'(u) \\ -h(u) \sin v & h(u) \cos v & 0 \\ -h'(u) \sin v & h'(u) \cos v & 0 \end{vmatrix}}{h(u) \sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}} = 0$$

$$g := \frac{\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/\partial v^2 & \partial^2 y/\partial v^2 & \partial^2 z/\partial v^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} h'(u) \cos v & h'(u) \sin v & g'(u) \\ -h(u) \sin v & h(u) \cos v & 0 \\ -h(u) \cos v & -h(u) \sin v & 0 \end{vmatrix}}{h(u) \sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}} = \\ = \frac{g'(u)h(u)}{\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}}$$

Dunque, preso $\vec{w} = (\dot{u}, \dot{v})$ si ha:

$$\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w}) = (h'^2(u) + g'^2(u))\dot{u}^2 + h^2(u)\dot{v}^2 \quad (6.13)$$

$$\mathbf{II}(\vec{w}, \vec{w}) = \frac{h'(u)g''(u) - h''(u)g'(u)}{\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}}\dot{u}^2 + \frac{h(u)g'(u)}{\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}}\dot{v}^2 \quad (6.14)$$

e infine, dall'equazione (6.8), ricaviamoci la curvatura normale, fissata una direzione tangente \vec{w} :

$$k_N(\vec{w}) = \frac{\mathbf{II}(\vec{w}, \vec{w})}{\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w})} = \frac{[h'(u)g''(u) - h''(u)g'(u)]\dot{u}^2 + h(u)g'(u)\dot{v}^2}{[(h'^2(u) + g'^2(u))\dot{u}^2 + h^2(u)\dot{v}^2]\sqrt{h'^2(u) + g'^2(u)}} \quad (6.15)$$

6.2.3 Calcolo della curvatura gaussiana

Abbiamo già visto che k_N può essere pensata come funzione su $S^1 \subset T_P S$, ossia sull'insieme dei vettori di norma unitaria. Essendo tale insieme compatto, per il Teorema di Weierstrass necessariamente esisteranno due direzioni a cui corrisponderanno un massimo e un minimo della curvatura normale. Il problema, ora, è trovare queste direzioni e il valore delle corrispondenti curvatures, per calcolare esplicitamente la curvatura gaussiana K .

Passo 1. Lo studio di massimi e minimi sul cerchio unitario non è semplice. Tuttavia l'omogeneità di \mathbf{II} ci viene in soccorso. Consideriamo la circonferenza unitaria e una retta passante per l'origine che la interseca; prendiamo il vettore \vec{OP} lungo la direzione della retta e poi prendiamo un altro vettore \vec{OQ} non unitario lungo la stessa direzione. Grazie all'omogeneità, se la funzione k_N ha un massimo in \vec{OP} , ha anche massimo in \vec{OQ} , dunque possiamo ricondurci a studiare il problema di massimo e minimo su tutto $T_P S \sim \mathbb{R}^2$,

invece che sul cerchio unitario⁸. Insomma, invece di cercare i vettori unitari \vec{t} che massimizzano (o minimizzano) $\mathbf{II}(\vec{t}, \vec{t})$, cercheremo i vettori $\vec{w} \in T_P S$ che massimizzano (o minimizzano) $\frac{\mathbf{II}(\vec{w}, \vec{w})}{\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w})}$. Preso $\vec{w} = (\dot{u}, \dot{v})$, k_N è funzione razionale (non lineare) di \dot{u}, \dot{v} :

$$k_N(\dot{u}, \dot{v}) = \frac{e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} = \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}} \quad (6.16)$$

Per nostra brevità di notazione abbiamo definito $\mathbf{I} := E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$ e $\mathbf{II} := e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2$. Il fatto di esserci liberati del vincolo $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 = 1$, grazie all'omogeneità, è decisamente utile.

Passo 2. Dall'analisi sappiamo che i punti stazionari (che per l'omogeneità giacciono su rette) vanno ricercati tra i punti dove si annullano le derivate parziali.

$$\begin{cases} \frac{\partial k_N}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{\mathbf{I}^2} [(2e\dot{u} + 2f\dot{v})\mathbf{I} - (2E\dot{u} + 2F\dot{v})\mathbf{II}] = 0 \\ \frac{\partial k_N}{\partial \dot{v}} = \frac{1}{\mathbf{I}^2} [(2f\dot{u} + 2g\dot{v})\mathbf{I} - (2F\dot{u} + 2G\dot{v})\mathbf{II}] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{I} \frac{\partial k_N}{\partial \dot{u}} = e\dot{u} + f\dot{v} - \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}}(E\dot{u} + F\dot{v}) = 0 \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} \frac{\partial k_N}{\partial \dot{v}} = f\dot{u} + g\dot{v} - \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}}(F\dot{u} + G\dot{v}) = 0 \end{cases}$$

D'altro canto, per la (6.16), $\frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}} = k_N$. Si ha dunque:

$$\begin{cases} e\dot{u} + f\dot{v} - k_N(E\dot{u} + F\dot{v}) = 0 \\ f\dot{u} + g\dot{v} - k_N(F\dot{u} + G\dot{v}) = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

che è un sistema non lineare, dal momento che $k_N = k_N(\dot{u}, \dot{v})$; in un certo senso k_N racchiude in sé tutta la non linearità del problema. Tuttavia

⁸Mostriamo meglio l'omogeneità:

$$k_N = \frac{\mathbf{II}(\vec{w}, \vec{w})}{\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w})} = \frac{e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

e anche moltiplicando il vettore velocità \vec{w} per uno scalare p , abbiamo che $p\vec{w} = (p\dot{u}, p\dot{v})$, da cui:

$$k_N = \frac{\mathbf{II}(p\vec{w}, p\vec{w})}{\mathbf{I}(p\vec{w}, p\vec{w})} = \frac{p^2(e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2)}{p^2(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)} = \frac{\mathbf{II}(\vec{w}, \vec{w})}{\mathbf{I}(\vec{w}, \vec{w})}$$

e dunque ci siamo.

possiamo riscrivere il sistema (6.17) in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} e - k_N E & f - k_N F \\ f - k_N F & g - k_N G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

o anche, più sinteticamente:

$$(\widehat{\mathbf{\Pi}} - k_N \widehat{\mathbf{I}}) \vec{w} = 0 \quad (6.19)$$

intendendo con $\widehat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ e con $\widehat{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$. Il problema è dunque un problema agli autovalori.

Passo 3. Dobbiamo risolvere ora tale problema agli autovalori, ovvero dobbiamo cercare un vettore $\vec{w} = (\dot{u}, \dot{v})$ per cui valga l'uguaglianza (6.19). Dall'algebra lineare sappiamo che il problema ha soluzione diversa dal vettore nullo se e solo se $\det(\widehat{\mathbf{\Pi}} - k_N \widehat{\mathbf{I}}) = 0$, cioè se:

$$\begin{vmatrix} e - k_N E & f - k_N F \\ f - k_N F & g - k_N G \end{vmatrix} = 0 \quad (6.20)$$

Questa equazione fissa le curvature principali, ma dato che k_N è funzione razionale non lineare di \dot{u} e \dot{v} , la ricerca del vettore \vec{w} mediante questa equazione sarebbe decisamente ardua. Tuttavia, dopotutto, a noi interessa solamente trovare le curvature principali: l'idea è dunque quella di dimenticarsi delle variabili (\dot{u}, \dot{v}) e di risolvere l'equazione direttamente in k_N . Insomma, ci dimentichiamo degli autovettori, preoccupandoci unicamente degli autovalori del fascio di matrici $\widehat{\mathbf{\Pi}} - k_N \widehat{\mathbf{I}}$, i valori per cui risulta $\det(\widehat{\mathbf{\Pi}} - k_N \widehat{\mathbf{I}}) = 0$, ovvero le curvature principali.

Per ricondurre questo problema ad un problema agli autovalori tradizionale, introduciamo la seguente matrice

$$S = \widehat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{\Pi}} \quad (6.21)$$

detta, e vedremo meglio poi perché, **matrice dell'operatore di forma** associato alla superficie nel punto P . Allora le curvature principali sono esattamente gli autovalori di S . Infatti (detta \mathcal{I} la matrice identità di ordine 2):

$$\det(S - k_N \mathcal{I}) = \det(\widehat{\mathbf{I}}^{-1} \widehat{\mathbf{\Pi}} - k_N \widehat{\mathbf{I}}^{-1} \widehat{\mathbf{I}}) = \det(\widehat{\mathbf{I}}^{-1}) \cdot \det(\widehat{\mathbf{\Pi}} - k_N \widehat{\mathbf{I}}) \quad (6.22)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il Teorema di Binet. Dunque studiare l'annullarsi di $\det(S - k_N \mathcal{I})$ o quello di $\det(\widehat{\mathbf{\Pi}} - k_N \widehat{\mathbf{I}})$ è assolutamente la

stessa cosa (dato che $\det(\widehat{\mathbf{I}}^{-1})$ non può annullarsi per le ipotesi di regolarità). Ciò che troveremmo sarebbero due autovalori che (dato che il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza sia del massimo, sia del minimo) corrisponderebbero esattamente al valore minimo e al valore massimo della curvatura normale k_N .

Ma ciò che ci interessa è in realtà trovare la curvatura gaussiana, ossia il prodotto $k_{MIN} \cdot k_{MAX}$ e ciò è possibile, in maniera più semplice, grazie un'importante rappresentazione del prodotto delle curvature principali. Sappiamo infatti dall'algebra lineare che il prodotto degli autovalori di una matrice è pari al suo determinante. Dato che la curvatura gaussiana $K := k_{MIN} \cdot k_{MAX}$, segue immediatamente che

$$K = \det S = \det(\widehat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{II}}) = \frac{\det \widehat{\mathbf{II}}}{\det \widehat{\mathbf{I}}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (6.23)$$

dove la penultima uguaglianza, ancora una volta, vale per il teorema di Binet. D'altro canto il determinante è invariante per cambiamento di base: dunque supponendo anche di mutare la parametrizzazione (u, v) , il $\det(S)$, e conseguentemente K , non cambiano, ma formalizzeremo meglio in seguito questo concetto.

Questa importante formula permette il calcolo della curvatura gaussiana mediante le due forme fondamentali, senza alcun bisogno di calcolare effettivamente gli autovalori della matrice dell'operatore di forma. La curvatura gaussiana K è definita mediante gli autovalori, ma siamo riusciti a calcolarla senza di essi.

6.2.4 Curvatura media

Per completezza, ricordiamo che esiste anche un altro tipo di curvatura, la curvatura media⁹. Sebbene storicamente essa sia sempre stata definita come semisomma delle curvature principali, ovvero:

$$H = \frac{k_{MIN} + k_{MAX}}{2}$$

oggi si preferisce in realtà definirla nel seguente modo:

Definizione 6.5. *Si chiama **curvatura media** la somma delle curvature principali. In simboli:*

$$H := k_{MIN} + k_{MAX}$$

⁹Si vedrà più avanti la ragione per cui tale curvatura (dai tempi di Gauss in poi) ha assunto un'importanza minore e la curvatura gaussiana si sia imposta come molto più significativa.

Il vantaggio di questa definizione è che, per note proprietà degli autovalori e per quanto detto nel paragrafo precedente, si ha che:

$$H := k_{MIN} + k_{MAX} = \text{tr}S$$

vale a dire: la somma dei due autovalori k_{MIN} e k_{MAX} dà proprio la traccia della matrice S (ossia la somma degli elementi sulla diagonale principale di S).

Con un rapido calcolo abbiamo che:

$$\begin{aligned} H = \text{tr}S &= \text{tr}(\widehat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{II}}) = \text{tr}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \text{tr}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \text{tr}\begin{pmatrix} eG - fF & Gf - Fg \\ ef - Fe & Eg - fF \end{pmatrix} = \\ &= \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} \quad (6.24) \end{aligned}$$

6.2.5 Calcolo delle curvatures principali

Ora che abbiamo definito la curvatura media, non ci è difficile calcolare esplicitamente le curvatures principali k_{MIN} e k_{MAX} . Dal momento che la loro somma vale H e il loro prodotto vale K , esse sono le soluzioni della seguente equazione di secondo grado:

$$\kappa^2 - H\kappa + K = 0$$

il cui discriminante deve essere positivo, visto che di tali soluzioni l'esistenza ci è garantita (già dal Teorema di Weierstrass precedentemente citato). Dalla disequazione $\Delta \geq 0$ ricaviamo che $H^2 - 4K \geq 0$ e dunque abbiamo la seguente disuguaglianza:

$$H^2 \geq 4K \quad (6.25)$$

e le curvatures principali sono

$$\begin{aligned} k_{MIN} &= H - \sqrt{H^2 - 4K} \\ k_{MAX} &= H + \sqrt{H^2 - 4K} \end{aligned} \quad (6.26)$$

e scrivendo la quantità:

$$(k_{MAX} - k_{MIN})^2 = (H + \sqrt{H^2 - 4K} - H + \sqrt{H^2 - 4K})^2 = 4(H^2 - 4K) \quad (6.27)$$

ricaviamo immediatamente che:

$$H^2 - 4K = \frac{1}{4}(k_{MAX} - k_{MIN})^2 \quad (6.28)$$

e dunque anche che nella (6.25) si ha l'uguaglianza solamente nel caso in cui $k_{MAX} = k_{MIN}$, ossia nei punti in cui la curvatura è la stessa in ogni direzione.

6.2.6 Proprietà di invarianza

La proprietà non banale di H e K è che sono quantità completamente indipendenti dalla parametrizzazione di S . Sono cioè, grandezze **geometriche**. Tale risultato non è affatto ovvio: abbiamo in effetti usato matrici che si riferiscono a una specifica parametrizzazione. Dunque enunciamo e dimostriamo la tesi già esposta.

Teorema 6.3. *K e H sono grandezze geometriche.*

Dimostrazione. Supponiamo di cambiare parametrizzazione. Sia:

$$\begin{cases} u = \varphi(\bar{u}, \bar{v}) \\ v = \psi(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases}$$

nell'ipotesi che $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} > 0$ (regolarità e conservazione dell'orientazione).

Dunque

$$P(\bar{u}, \bar{v}) = P(u, v) = P(\varphi(\bar{u}, \bar{v}), \psi(\bar{u}, \bar{v}))$$

e per le basi naturali abbiamo che:

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}}$$

Ne segue che per la prima forma:

$$\bar{E} = \frac{\partial P}{\partial \bar{u}} \frac{\partial P}{\partial \bar{u}} = E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \right)^2 + 2F \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} + G \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \right)^2$$

$$\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial \bar{u}} \frac{\partial P}{\partial \bar{v}} = E \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} + F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} \right) + G \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}}$$

$$\bar{G} = \frac{\partial P}{\partial \bar{v}} \frac{\partial P}{\partial \bar{v}} = E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} \right)^2 + 2F \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} + G \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \right)^2$$

Quindi per matrice della metrica risulta:

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}$$

e chiamando $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}$ la matrice jacobiana, possiamo scrivere più semplicemente:

$$\widehat{\mathbf{I}} = J^T \cdot \widehat{\mathbf{I}} \cdot J \quad (6.29)$$

L'equazione (6.29) manifesta un rapporto di congruenza tra le matrici $\widehat{\mathbf{I}}$ e $\widehat{\mathbf{I}}$. In maniera del tutto analoga si può calcolare la legge di trasformazione di $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ e si trova che:

$$\widehat{\mathbf{\Pi}} = J^T \cdot \widehat{\mathbf{\Pi}} \cdot J \quad (6.30)$$

e si nota che ancora $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ e $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ sono congruenti (le equazioni (6.29) e (6.30) sono proprio la definizione di congruenza).

Quindi le matrici delle due forme fondamentali si trasformano per congruenza. Ne segue che S si trasforma per similitudine. Infatti:

$$\bar{S} = \bar{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{\Pi}} = (J^T \cdot \mathbf{I} \cdot J)^{-1} \cdot J^T \cdot \mathbf{\Pi} \cdot J = J^{-1} \cdot \mathbf{I}^{-1} \cdot J^{T^{-1}} \cdot J^T \cdot \mathbf{\Pi} \cdot J$$

e dunque:

$$\bar{S} = J^{-1} \cdot S \cdot J \quad (6.31)$$

Dall'algebra lineare sappiamo che matrici simili hanno stesso determinante e stessa traccia, dunque $\bar{K} = K$ e $\bar{H} = H$, e ci siamo. \square

6.3 Metodo gaussiano: operatore di forma

6.3.1 Mappa di Gauss

Presentiamo ora un secondo modo, dovuto a Gauss, di introdurre la seconda forma fondamentale e il concetto di curvatura gaussiana, senza far uso delle curvatura principali. Il percorso che seguiremo inizierà con l'introdurre un'applicazione S e da essa ricavare la seconda forma (e non il contrario, come avevamo fatto nei paragrafi precedenti). Il cambiamento di punto di vista corrisponde a ricordarsi della seguente scrittura di k_N :

$$k_N = -\vec{t} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds}$$

Nell'approccio di Gauss l'idea dominante, infatti, è che la curvatura di S è misurata dalla velocità con cui varia la normale \vec{N} al muoversi di un punto P sulla superficie, lungo una qualsiasi curva parametrizzata mediante il

parametro arco. Per istituzionalizzare questa idea, Gauss introduce un'applicazione, la cosiddetta **mappa di Gauss** $G(P)$, da S a S^2 . A ogni punto P della superficie S , Gauss associa un vettore sulla sfera unitaria: tale vettore è proprio il vettore normale alla superficie nel punto P , riportato parallelamente nell'origine degli assi. In simboli:

$$G(P) = \vec{N}(P)$$

Al muoversi di P su S , anche il vettore nella mappa di Gauss si muove

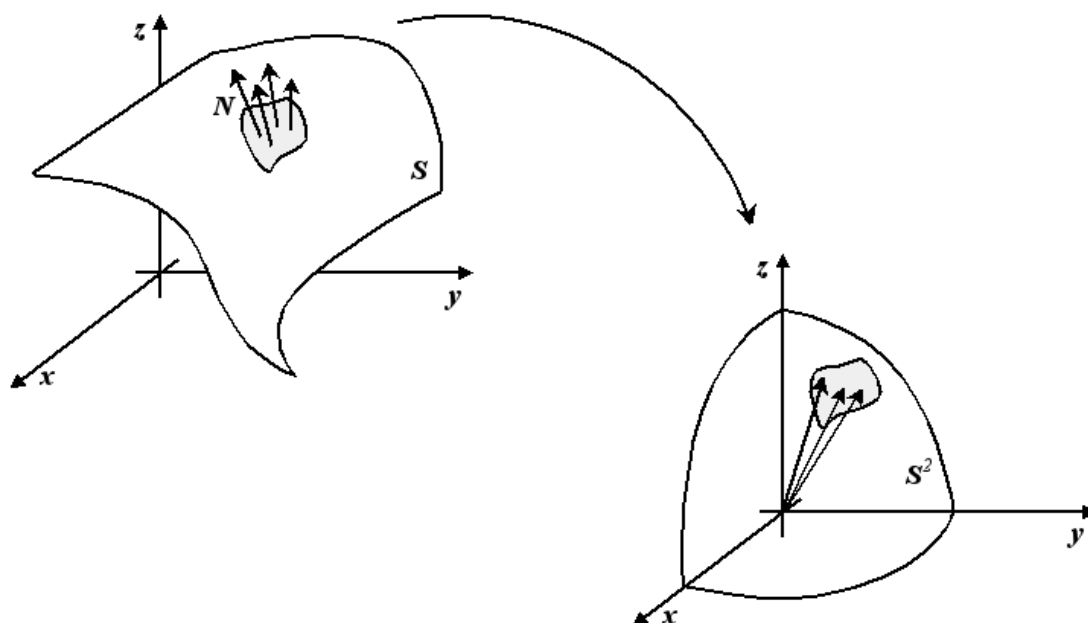


Figura 6.2: La mappa di Gauss

conseguenzialmente sulla sfera. L'immagine di S mediante una mappa di Gauss è detta **immagine sferica**. A ogni porzione di superficie S sarà associata una porzione di superficie sferica che corrisponde al luogo dei punti che il vettore \vec{N} , trasportato nell'origine degli assi, va a toccare durante il suo movimento. Ad esempio, per una superficie completamente piatta, il vettore normale non compie alcun movimento e l'immagine sferica della mappa di Gauss è solamente un punto.

Si tratta ora di studiare come varia la normale \vec{N} , ossia di studiare $\frac{d\vec{N}}{ds}$. Per ricondurci al concetto di derivata direzionale di una funzione lungo un vettore (o lungo un campo vettoriale) scomponiamo \vec{N} sulla base cartesiana:

$$\vec{N} = N_1(u, v)\vec{i} + N_2(u, v)\vec{j} + N_3(u, v)\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{dN_1(u, v)}{ds} \vec{i} + \frac{dN_2(u, v)}{ds} \vec{j} + \frac{dN_3(u, v)}{ds} \vec{k}$$

e, per il teorema di derivazione di funzione composta, $\forall j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\frac{dN_j}{ds} = \frac{\partial N_j}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial N_j}{\partial v} \frac{dv}{ds} = \vec{t} \cdot \text{grad} N_j = \nabla_{\vec{t}} N_j \quad (6.32)$$

che è la derivata direzionale della j -esima componente di \vec{N} lungo la tangente $\vec{t} = (u', v')$ alla curva.

Dunque la velocità per unità di arco del punto Q funzione di P nell'immagine sferica di S è data da:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = (\nabla_{\vec{t}} N_1) \vec{i} + (\nabla_{\vec{t}} N_2) \vec{j} + (\nabla_{\vec{t}} N_3) \vec{k} = \nabla_{\vec{t}} \vec{N} \quad (6.33)$$

che è la derivata direzionale del campo vettoriale $\vec{N}(s)$ lungo la curva γ di tangente \vec{t} . Allo stesso modo si definisce $\nabla_{\vec{w}} \vec{N}$, quando si considerano curve con parametrizzazione arbitraria e velocità $\vec{w} = (\dot{u}, \dot{v})$.

Il simbolo $\nabla_{\vec{w}} \vec{N}$ può anche essere interpretato in modo diverso. Supponiamo di tenere fisso il punto P sulla superficie (e quindi di tenere fissa la normale \vec{N}) e di lasciar variare il vettore velocità \vec{w} (cioè di far variare la curva lungo cui sto derivando il campo): posso così interpretare $\nabla_{\vec{w}} \vec{N}$ come funzione di \vec{w} , in particolare come operatore lineare su \vec{v} , poiché esso verifica¹⁰:

$$\nabla_{\vec{w}_1} \vec{N} + \nabla_{\vec{w}_2} \vec{N} = \nabla_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2} \vec{N} \quad (\text{additività})$$

$$\nabla_{\lambda \vec{w}} \vec{N} = \lambda \nabla_{\vec{w}} \vec{N} \quad (\text{omogeneità})$$

Quindi lo studio della derivata direzionale di \vec{N} al variare della curva scelta (o meglio: al variare del vettore tangente scelto) fornisce un operatore lineare su $T_P S$.

6.3.2 Operatore di forma

Definiamo così la seguente applicazione, chiamata **operatore di forma** (o anche, talvolta, **mappa di Weingarten**):

$$S_P(\vec{w}) := -\nabla_{\vec{w}} \vec{N} = -\left. \frac{d}{dt} \vec{N}(t) \right|_{\gamma} \quad (6.34)$$

ove γ è la curva avente \vec{w} come velocità. Vediamo alcune proprietà.

¹⁰Tali proprietà si deducono immediatamente dalla (6.32).

Proprietà dell'operatore di forma

- S_P è un'applicazione a valori nello spazio tangente. Infatti, essendo \vec{N} un versore, $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$ e derivando otteniamo che $2 \frac{d\vec{N}}{dt} \cdot \vec{N} = 0$, il che esprime l'ortogonalità di \vec{N} rispetto a $\frac{d\vec{N}}{dt}$, e dunque l'appartenenza di quest'ultimo allo spazio tangente $T_P S$. In generale, la derivata di un versore è ortogonale al versore stesso.
- S_P è lineare. Questo è vero per la linearità della derivata direzionale rispetto all'argomento lungo cui si deriva, una linearità già vista nel paragrafo precedente e dimostrata dall'espressione cartesiana seguente:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{w}} \vec{N} = & \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial N_2}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial N_3}{\partial x} \vec{k} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \vec{k} \right) \dot{y} + \\ & + \left(\frac{\partial N_1}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial N_2}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \vec{k} \right) \dot{z} \end{aligned}$$

- S_P è il differenziale della mappa di Gauss $G : S \rightarrow S^2$. La mappa di Gauss G non è un'applicazione lineare, ma il suo differenziale dG lo è: mostriamo che tale differenziale è proprio l'operatore di forma. Consideriamo la mappa di Gauss G che a ogni punto P della superficie S associa un punto Q sulla sfera S^2 . Per la definizione stessa di mappa di Gauss i piani tangenti in Q e in P sono paralleli ($T_P S // T_Q S^2$), e a meno di spostamenti rigidi possiamo affermare che i due piani coincidono ($T_P S = T_Q S^2$). Il differenziale della mappa di Gauss è un'applicazione $dG : T_P S \rightarrow T_Q S^2$ (se la mappa G va da punto a punto, il suo differenziale deve andare da piano tangente a piano tangente). Ma per l'identificazione precedente i due piani tangenti coincidono, dunque $dG : T_P S \rightarrow T_P S$. L'applicazione G non fa altro che traslare il versore \vec{N} nell'origine degli assi; nel processo di differenziazione tale traslazione non ha peso, e dG dunque rende conto di come si muove \vec{N} rispetto a una data direzione. Infatti confrontando l'espressione di dG fornita dall'analisi con la definizione di S_P precedentemente definita, sostanzialmente si ha (a meno di un segno):

$$S_P \equiv dG(P) \tag{6.35}$$

Ne consegue che $\det S_P = \det dG(P) = \det J_G$ che è il determinante jacobiano della mappa di Gauss (dG è la matrice delle derivate parziali di G). Già sapevamo, dall'equazione (6.23) che $K = \det S_P$; ora sappiamo anche che $K = \det J_G$.

Conosciamo il significato geometrico del determinante jacobiano: è il coefficiente di dilatazione delle aree. Ciò significa che, “brutalmente”:

$$|K| = \det J_G = \lim_{"A \rightarrow 0"} \frac{A_{sferica}}{A_{iniziale}} \quad (6.36)$$

Questa espressione (che è la definizione data da Gauss della curvatura) significa che la curvatura gaussiana può essere vista come il limite del rapporto tra l'area spazzata dal raggio versore \vec{OQ} nella mappa di Gauss e la relativa regione di superficie S in cui il punto P si muove. L'operazione di limite è necessaria, poiché la formula (6.36) è vera solo nell'approssimazione lineare.

Se la superficie è piana, l'area sferica è nulla, e nulla è coerentemente anche la curvatura gaussiana; inoltre tanto più si muove \vec{N} , quanto più si ingrandisce l'area sferica, e quindi, al limite, anche la curvatura gaussiana.

- S_P è un'applicazione simmetrica.

La simmetria di S_P è intesa nel senso usato nella teoria delle applicazioni su uno spazio vettoriale con prodotto scalare; in queste condizioni ha senso parlare di simmetria, e vale:

$$S_P(\vec{w}_1) \cdot \vec{w}_2 = S_P(\vec{w}_2) \cdot \vec{w}_1 \quad (6.37)$$

Infatti se consideriamo γ_1 e γ_2 curve su S aventi rispettivamente \vec{w}_1 e \vec{w}_2 come velocità, possiamo immaginare di poter costruire un sistema di linee coordinate aventi γ_1 e γ_2 come membri. Ciò equivale a supporre che $\vec{w}_1 = \frac{\partial P}{\partial t_1}$ e $\vec{w}_2 = \frac{\partial P}{\partial t_2}$. Ma allora dall'equazione (6.37) si ha che:

$$S_P(\vec{w}_1) \cdot \vec{w}_2 = -(\nabla_{\vec{w}_1} \vec{N}) \cdot \vec{w}_2 = -\frac{\partial \vec{N}}{\partial t_1} \frac{\partial P}{\partial t_2} = \vec{N} \frac{\partial^2 P}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (6.38)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per la regola di integrazione per parti di Leibniz, dal momento che

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial P}{\partial t_2} \right) = \frac{\partial \vec{N}}{\partial t_1} \frac{\partial P}{\partial t_2} + \vec{N} \frac{\partial^2 P}{\partial t_1 \partial t_2}$$

La simmetria di S_P segue dalla commutabilità delle derivate seconde¹¹.

¹¹In alternativa si poteva dimostrare che, per la base naturale:

$$S \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial v} = (-\nabla_{\frac{\partial P}{\partial u}} \vec{N}) \cdot \frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} = \vec{N} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = S \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial u}$$

e poi, grazie alla linearità, estendere tale simmetria a vettori qualsiasi.

Quest'ultima relazione trovata è particolarmente importante perché lega il punto di vista di Gauss al punto di vista di Eulero. Possiamo infatti dire che vale il seguente teorema:

Teorema 6.4.

$$\forall \vec{p}, \vec{q} \in T_P S : \quad S_P(\vec{p}) \cdot \vec{q} = \mathbf{II}(\vec{p}, \vec{q})$$

Dimostrazione. Infatti scelti due vettori \vec{p}, \vec{q} dello spazio tangente, essi possono essere espressi, in funzione della base naturale, come

$$\vec{p} = a \frac{\partial P}{\partial u} + b \frac{\partial P}{\partial v}$$

$$\vec{q} = \alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}$$

da cui:

$$\begin{aligned} S_P(\vec{p}) \cdot \vec{q} &= S_P\left(a \frac{\partial P}{\partial u} + b \frac{\partial P}{\partial v}\right) \cdot \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}\right) = -\nabla_{\left(a \frac{\partial P}{\partial u} + b \frac{\partial P}{\partial v}\right)} \vec{N} \cdot \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}\right) = \\ &= \left(-a \nabla_{\frac{\partial P}{\partial u}} \vec{N} + b \nabla_{\frac{\partial P}{\partial v}} \vec{N}\right) \cdot \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}\right) = \left(-a \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} + b \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}\right) \cdot \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}\right) = \\ &= \left(-a \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} + b \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}\right) \cdot \left(\alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}\right) = \\ &= -a\alpha \left(\frac{\partial N}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}\right) - a\beta \left(\frac{\partial N}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v}\right) - b\alpha \left(\frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u}\right) - b\beta \left(\frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

D'altro canto, visto l'ortogonalità di \vec{N} rispetto alla base naturale, abbiamo che:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial P}{\partial u}\right) = \frac{\partial N}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial P}{\partial v}\right) = \frac{\partial N}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial P}{\partial u}\right) = \frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial P}{\partial v}\right) = \frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} &= -\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \\ \frac{\partial N}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} &= -\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} &= -\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial N}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} &= -\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\end{aligned}$$

e dunque:

$$S_P(\vec{p}) \cdot \vec{q} = a\alpha \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + (a\beta - b\alpha) \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} + b\beta \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \mathbf{II}(\vec{p}, \vec{q})$$

cioè la tesi.

Si noti che calcolare tale forma nel generico vettore velocità

$$\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

di una curva γ su S restituisce l'equazione (6.1), la forma quadratica associata alla seconda forma fondamentale¹². \square

Oppure, ancora, possiamo dire che la funzione S_P è esattamente la stessa funzione definita nel paragrafo 6.2.3, ovvero:

Teorema 6.5. $S = \hat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{II}}$.

Dimostrazione. Prendiamo \vec{w}_1 e \vec{w}_2 che coincidono con gli elementi della base naturale. Allora abbiamo che, per l'equazione (6.38):

$$\left\{ \begin{array}{l} S_P\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial u} = \vec{N} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = e \\ S_P\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial v} = \vec{N} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = f \\ S_P\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial u} = \vec{N} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = f \\ S_P\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial v} = \vec{N} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = g \end{array} \right. \quad (6.39)$$

¹²Sappiamo che per estensione tale forma quadratica viene detta a sua volta "seconda forma".

Chiamiamo $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_3 \\ S_2 & S_4 \end{pmatrix}$ la matrice che rappresenta S_P sulla base naturale. Essa contiene, per colonne, le componenti di S_P sviluppate rispetto ai vettori $\frac{\partial P}{\partial u}$ e $\frac{\partial P}{\partial v}$. Abbiamo che¹³:

$$\begin{cases} S \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right) = S_1 \frac{\partial P}{\partial u} + S_2 \frac{\partial P}{\partial v} \\ S \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right) = S_3 \frac{\partial P}{\partial u} + S_4 \frac{\partial P}{\partial v} \end{cases} \quad (6.40)$$

E moltiplicando ambo i membri di ambo le equazioni per $\frac{\partial P}{\partial u}$ o per $\frac{\partial P}{\partial v}$, e ricordandoci del sistema (6.39), otteniamo che:

$$\begin{cases} e = S_1 E + S_2 F \\ f = S_1 F + S_2 G \\ f = S_3 E + S_4 F \\ g = S_3 F + S_4 G \end{cases} \quad (6.41)$$

Oppure, in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & S_3 \\ S_2 & S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

il che significa che $S = \widehat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{\Pi}}$, o anche, visto il legame tra matrici e applicazioni lineari, che $S_P = \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{I}}^{-1}) \circ \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{\Pi}})$, intendendo questa volta con $\mathcal{L}(M)$ l'applicazione lineare associata alle matrici M . \square

6.4 Metodo tayloriano

Dopo Eulero e Gauss, c'è un terzo modo (puramente geometrico) per interpretare la seconda forma fondamentale.

¹³Si noti che per il generico vettore le cui coordinate sulla base naturale sono $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, combinando le (6.40) si ha che:

$$S \cdot \left(\lambda \frac{\partial P}{\partial u} + \mu \frac{\partial P}{\partial v} \right) = (\lambda S_1 + \mu S_3) \frac{\partial P}{\partial u} + (\lambda S_2 + \mu S_4) \frac{\partial P}{\partial v}$$

e ciò è in accordo con il fatto che:

$$S \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & S_3 \\ S_2 & S_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda S_1 + \mu S_3 \\ \lambda S_2 + \mu S_4 \end{pmatrix}$$

a riprova che la nostra disposizione degli elementi S_i nella matrice S è corretta.

Prendiamo un punto $P_0 = P_0(u_0, v_0)$ su S e consideriamo lo spazio tangente $T_{P_0}S$. Prendiamo un $P \neq P_0$, $P = P(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$, anch'esso situato su S , e vediamo quanto vale la distanza $d(P, T_{P_0}S)$. Tale distanza è nella parte principale una forma quadratica in Δu e Δv . Infatti facendo lo sviluppo di Taylor arrestato al second'ordine abbiamo che:

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial u} \Big|_{P_0} \Delta u + \frac{\partial P}{\partial v} \Big|_{P_0} \Delta v \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \Big|_{P_0} \Delta u^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \Big|_{P_0} \Delta u \Delta v + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \Big|_{P_0} \Delta v^2 \right) + o(\|\overrightarrow{P_0 P}\|^2) \quad (6.43)$$

E dunque la distanza tra P' e $T_{P_0}S$ è data da¹⁴:

$$\begin{aligned} d(P, T_{P_0}S) &= \overrightarrow{P_0 P} \cdot \vec{N} = \\ &= 0 + \frac{1}{2} \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \Big|_{P_0} \Delta u^2 + 2 \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \Big|_{P_0} \Delta u \Delta v + \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \Big|_{P_0} \Delta v^2 \right) + o(\|\overrightarrow{P_0 P}\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} (e \Delta u^2 + 2f \Delta u \Delta v + g \Delta v^2) + o(\|\overrightarrow{P_0 P}\|^2) = \frac{1}{2} \mathbf{II}(\Delta u, \Delta v) + o(\|\overrightarrow{P_0 P}\|^2) \end{aligned} \quad (6.44)$$

con e, f, g calcolate in P_0 . Quindi possiamo anche dire (fig. 6.3) che la seconda forma misura la velocità con cui un punto P si allontana dal piano tangente a P_0 .

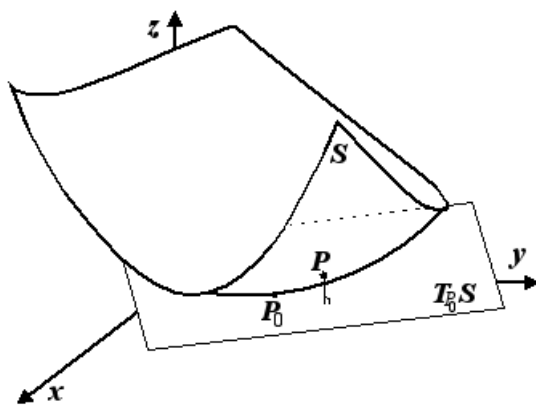


Figura 6.3: L'allontanarsi di P dal piano tangente

¹⁴Si noti che la parte lineare dello sviluppo di Taylor viene a eliminarsi poiché giace sul piano tangente ed è dunque perpendicolare a \vec{N} .

Esempio: superficie data da un'equazione cartesiana. Consideriamo una superficie data da un'equazione in forma cartesiana:

$$z = f(x, y) \quad (6.45)$$

e calcoliamone **I** e **II**. Occupiamoci dapprima della prima forma.

Primo modo. Possiamo trovare i coefficienti direttamente utilizzando il sistema (5.1). Parametizziamo la superficie cartesiana nel seguente modo, con x e y ad assumere il ruolo di u e v :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad (6.46)$$

Abbiamo quindi che:

$$E = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$G = \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

Secondo modo. Possiamo andare più a fondo, e partire dalla definizione di **I**, scrivendo la restrizione del prodotto scalare euclideo sullo spazio tangente $T_P S$. Dato che

$$P(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$$

la base naturale risulta essere:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \vec{k}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{k}$$

da cui due generici vettori del piano tangente sono:

$$\vec{w}_1 = a_1 \frac{\partial P}{\partial x} + b_1 \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\vec{w}_2 = a_2 \frac{\partial P}{\partial x} + b_2 \frac{\partial P}{\partial y}$$

e dunque il loro prodotto scalare:

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = a_1 a_2 \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + b_1 b_2 \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y}$$

e i coefficienti della \mathbf{I} sono, come in precedenza,

$$E = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$G = \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

Terzo modo. Possiamo invece partire dal Teorema 5.1, che afferma che $\mathbf{I}(dP, dP) = ds^2$. Scriviamo dunque la restrizione ds^2 della metrica sullo spazio tangente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^2 = \\ &= dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \\ &= \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] dx^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy + \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dy^2 \quad (6.47) \end{aligned}$$

che è la forma cartesiana della metrica, i cui coefficienti sono i coefficienti¹⁵ della prima forma. Si ha dunque, immediatamente, che:

$$E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

¹⁵Si presti solo attenzione al termine misto: il coefficiente di tale termine non è F , bensì $2F$. Il doppio prodotto viene naturalmente generato calcolando la prima forma in due vettori uguali (dP, dP) .

Per il calcolo dei coefficienti della seconda forma, il metodo più rapido è ricorrere al sistema (6.7). Dato che $EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$, si ha che:

$$e := \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \partial f/\partial x \\ 0 & 1 & \partial f/\partial y \\ 0 & 0 & \partial^2 f/\partial x^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\partial^2 f/\partial x^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$f := \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \partial f/\partial x \\ 0 & 1 & \partial f/\partial y \\ 0 & 0 & \partial^2 f/(\partial x \partial y) \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\partial^2 f/(\partial x \partial y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$g := \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \partial f/\partial x \\ 0 & 1 & \partial f/\partial y \\ 0 & 0 & \partial^2 f/\partial y^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\partial^2 f/\partial y^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

La curvatura gaussiana K è data da:

$$K = \frac{\det \widehat{\mathbf{\Pi}}}{\det \widehat{\mathbf{I}}} = \frac{eg - f^2}{\det \widehat{\mathbf{I}}} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)^2}$$

La matrice S dell'operatore di forma dell'applicazione è data da:

$$\begin{aligned} S = \widehat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{\Pi}} &= \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} & \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \\ \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} & \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 & -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} & \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \\ \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} & \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.5 Cenno alla terza forma

Esiste poi anche una **terza forma fondamentale**, indubbiamente meno importante rispetto alle prime due. Mentre la seconda forma poteva essere espressa, in virtù del Teorema 6.4, come $\mathbf{II}(\vec{u}, \vec{v}) = S(\vec{u}) \cdot \vec{v}$, la terza forma fondamentale viene definita come:

$$\mathbf{III}(\vec{u}, \vec{v}) = S(\vec{u}) \cdot S(\vec{v}) \quad (6.48)$$

Si può dimostrare che la terza forma, insieme alla **I** e alla **II**, soddisfa la seguente identità:

$$\mathbf{III} - H\mathbf{II} + K\mathbf{I} = 0 \quad (6.49)$$

dove H è la curvatura media¹⁶ e K è la curvatura gaussiana.

¹⁶Se si vuole definire H alla vecchia maniera, come semisomma delle curvature principali, allora bisogna correggere la (6.49) in

$$\mathbf{III} - 2H\mathbf{II} + K\mathbf{I} = 0$$

Parte III

**Geometria intrinseca delle
superfici**

Capitolo 7

Introduzione

7.1 Estrinsecità e intrinsecità

Fino ad ora abbiamo semplicemente pensato la superficie come immersa nello spazio euclideo; tale fatto non era solo implicito nei nostri ragionamenti, bensì anche esplicito nei calcoli: ad esempio le equazioni parametriche

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

sono espressione delle coordinate cartesiane dello spazio ambiente, ossia dello spazio tridimensionale in cui la superficie vive. O ancora, quando abbiamo definito la derivata direzionale di un campo vettoriale sulla superficie (nel nostro caso il campo dei vettori normali) abbiamo valutato come cambia questo campo al variare di un punto sulla superficie. Senza l'immersione della superficie nello spazio tridimensionale, non avremmo potuto valutare il cambiamento del vettore normale (che non giace sulla superficie, bensì è perpendicolare ad essa). In altre parole, senza l'immersione di S nello spazio euclideo non avremmo potuto definire la seconda forma: dal momento che essa dà conto di come si muove il vettore normale; stando sulla superficie, non potremmo valutare né la curvatura normale né come la normale varia. Quando si utilizza questa ipotesi di immersione in \mathbb{E}^3 , e in particolare quando si fa uso della normale \vec{N} e della seconda forma **II**, si dice che si adotta un punto di vista **estrinseco**. Si parla invece di **geometria intrinseca** quando ci si riferisce a tutte quelle grandezze o proprietà che possono essere misurate o definite vivendo sulla superficie, in altri termini, utilizzando solamente la prima forma fondamentale **I**. Tutto ciò che dipende solo da **I** è dunque intrinseco, appena si ha dipendenza anche da **II** si perde l'intrinsecità. La scoperta fondamentale che ha aperto la strada alla geometria intrinseca è che la curvatura gaussiana K , che sembrerebbe una grandezza estrinseca,

visto che nasce dal confronto della superficie con i suoi piani tangenti, in realtà si rivela essere una grandezza intrinseca. Tale fondamentale scoperta è la tesi del Theorema Egregium, la cui dimostrazione sarà in qualche modo l'obiettivo di questa sezione.

È proprio in virtù del Theorema Egregium, ad esempio, che i fisici possono parlare di curvatura dello spazio-tempo, non essendo lo spazio-tempo immerso in alcunché: senza questa teoria non avrebbe potuto esistere la relatività generale einsteiniana. Ecco dunque la fondamentale importanza della curvatura gaussiana a discapito, ad esempio, della curvatura media, la quale ammette solamente una scrittura estrinseca.

La geometria intrinseca delle superfici è la porta d'ingresso della teoria delle **varietà differenziabili**, che può essere vista come estensione n -dimensionale della geometria gaussiana delle superfici.

Capitolo 8

Condizioni di compatibilità

8.1 Condizioni di Gauss-Mainardi-Codazzi

Come è possibile che la curvatura gaussiana

$$K = \frac{\det \widehat{\mathbf{II}}}{\det \widehat{\mathbf{I}}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

definita ricorrendo a \mathbf{II} sia una grandezza estrinseca? Il punto è che nella formula di K , in effetti, non compare esplicitamente \mathbf{II} , bensì il suo determinante; conoscere il determinante è molto meno che conoscere una matrice: data la matrice ho il suo determinante, ma non vale il viceversa. Ci deve dunque essere un qualche legame tra \mathbf{I} e $\det \mathbf{II}$, dobbiamo essere in grado di poter calcolare $\det \mathbf{II}$ a partire unicamente dalla prima forma. L'aspetto che rende la questione molto delicata è che $\det \mathbf{II}$ risulterà essere una **funzione differenziale** di \mathbf{I} , ossia costruita con le derivate parziali dei coefficienti di \mathbf{I} , e non una funzione algebrica. Dove sta l'inghippo?

L'inghippo sta nel fatto che non è possibile assegnare ad arbitrio la prima e la seconda forma. Mentre infatti nella teoria delle curve abbiamo dimostrato (teorema di Bonnet) che, date ad arbitrio $k(s)$ e $\tau(s)$, esiste ed è unica, a meno di spostamenti rigidi, la curva che ha s per arco, $k(s)$ per curvatura e $\tau(s)$ per torsione, nel caso della superficie questo non vale più. Se per le curve avevamo tre incognite $(x(s), y(s), z(s))$ e due funzioni da assegnare (k, τ) , per le superfici avremmo lo stesso numero di incognite, ma addirittura sei funzioni da assegnare $(E(u, v), F(u, v), G(u, v), e(u, v), f(u, v), g(u, v))$: i coefficienti della prima e della seconda forma). Insomma, dovremmo sperare che esistano tre funzioni $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ in modo tale che siano

soddisfatte le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = E(u, v) \\
 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = F(u, v) \\
 \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = G(u, v) \\
 \frac{\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/\partial u^2 & \partial^2 y/\partial u^2 & \partial^2 z/\partial u^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}} = e(u, v) \\
 \frac{\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/(\partial u \partial v) & \partial^2 y/(\partial u \partial v) & \partial^2 z/(\partial u \partial v) \end{vmatrix}}{\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}} = f(u, v) \\
 \frac{\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \\ \partial^2 x/\partial v^2 & \partial^2 y/\partial v^2 & \partial^2 z/\partial v^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}} = g(u, v)
 \end{array} \right. \quad (8.1)$$

Queste relazioni fissano le condizioni che devono sussistere fra le variabili e le funzioni assegnate affinché esista effettivamente la superficie; esse sono dette **condizioni di compatibilità di Gauss-Mainardi-Codazzi**. Il sistema (8.1) che le racchiude è sfortunatamente uno spaventoso sistema alle derivate parziali non lineare; come se non bastasse vi sono sei equazioni per fissare tre incognite: pretendere che sia risolubile per ogni scelta di (E, F, G, e, f, g) è francamente troppo. Il sistema di Gauss-Mainardi-Codazzi non è risolubile analiticamente, né riusciamo a semplificare le complesse relazioni tra le incognite e i parametri fissati. Dobbiamo aggirare il problema.

8.2 Equazioni di Gauss-Weingarten

Come possiamo trovare condizioni di compatibilità che leghino più direttamente **I** e **II**? Per cercarle, estendiamo la tecnica della base mobile di Frenet dalle curve alle superfici. Tale base mobile prenderà il nome di **base di Gauss**, e le equazioni di Frenet diventeranno le **equazioni di Gauss-Weingarten**.

Sviluppiamo la teoria, invece che nello spazio tridimensionale, in uno spazio $n + 1$ -dimensionale¹ con una superficie n -dimensionale $\alpha_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di cui diamo le equazioni parametriche nella forma:

$$\alpha_n : x_a = x_a(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (8.2)$$

per $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$; o anche:

$$P = P(u^j) \quad (8.3)$$

Su questa superficie consideriamo la base di Gauss \mathcal{G} formata dalla base naturale $\vec{g}_i := \frac{\partial P}{\partial u^i}$ e dalla normale \vec{N} alla superficie.

$$\mathcal{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n, \vec{N}) \quad (8.4)$$

Tale base non è ortonormata, dal momento che i vettori naturale non sono perpendicolari tra loro, né hanno norma unitaria². Come nel caso di Frenet, le equazioni di Gauss-Weingarten forniscono le derivate parziali della base sviluppate sulla base stessa. Si ha³:

$$\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial u^k} = \Gamma_{ik}^l \vec{g}_l + a_{ik} \vec{N} \quad (\text{Equazioni di Gauss}) \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} = -b_k^l \vec{g}_l \quad (\text{Equazioni di Weingarten}) \quad (8.6)$$

Le equazioni che sviluppano le derivate parziali della parte tangente della base di Gauss sono dette **equazioni di Gauss**, l'equazione che sviluppano le

¹Richiediamo che lo spazio abbia una dimensione in più rispetto alla superficie perché vogliamo l'esistenza della normale \vec{N} alla superficie.

²Questo non è un problema per la nostra trattazione; eventualmente comunque, se desiderassimo avere una base ortonormata, potremmo procedere con l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sui vettori di \mathcal{G} .

³Da questo momento in avanti adotteremo sovente la **notazione tensoriale**, che semplificherà notevolmente la lettura e i calcoli. Gli indici posti in basso saranno detti in posizione **covariante**, quelli posti in alto saranno detti in posizione **controvariante**. Ad esempio, nella scrittura Γ_{ik}^l , i e k sono in posizione covariante, mentre l è in posizione controvariante. Si adotteranno le seguenti convenzioni:

- quando un indice viene notato in posizione controvariante e in posizione covariante in due diversi termini di un prodotto (ad esempio, l'indice l in $\Gamma_{ik}^l \vec{g}_l$) si sottintenderà una sommatoria sull'indice in questione. In questo caso si ha che $\Gamma_{ik}^l \vec{g}_l = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \vec{g}_l$;
- ogni volta che si compie un'operazione di derivazione rispetto a un indice p , tale indice va messo in posizione covariante (ciò risulta chiaro nei simboli di Christoffel).

derivate parziali del vettore normale sono dette **equazioni di Weingarten**⁴. La matrice dei coefficienti è ancora detta matrice di Cartan. Si noti il fatto che nelle equazioni di Weingarten non compare nello sviluppo il termine in \vec{N} . Ciò è dovuto al fatto (già visto al paragrafo 6.3.2) che la derivata di un versore è ortogonale al versore stesso.

Ad esempio, nel caso $n = 2$ (il caso di una superficie bidimensionale nello spazio tridimensionale) abbiamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{g}_1}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 \vec{g}_1 + \Gamma_{11}^2 \vec{g}_2 + a_{11} \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{g}_1}{\partial u^2} = \Gamma_{12}^1 \vec{g}_1 + \Gamma_{12}^2 \vec{g}_2 + a_{12} \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{g}_2}{\partial u^1} = \Gamma_{21}^1 \vec{g}_1 + \Gamma_{21}^2 \vec{g}_2 + a_{21} \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{g}_2}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^1 \vec{g}_1 + \Gamma_{22}^2 \vec{g}_2 + a_{22} \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^1} = -b_1^1 \vec{g}_1 - b_1^2 \vec{g}_2 \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^2} = -b_2^1 \vec{g}_1 - b_2^2 \vec{g}_2 \end{array} \right. \quad (8.7)$$

dove le prime quattro equazioni sono le equazioni di Gauss e le ultime due sono le equazioni di Weingarten. Si nota innanzitutto che i coefficienti di queste equazioni non possono essere tutti indipendenti, ma sussiste la seguente relazione di simmetria:

$$\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l \quad \text{e} \quad a_{ik} = a_{ki}$$

Perché è vero questo? Perché per il Teorema di Schwarz si ha che le derivate seconde miste di P sono uguali:

$$\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial P}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial P}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial \vec{g}_k}{\partial u^i}$$

e dunque la seconda e la terza equazione del sistema (8.7) vanno a coincidere⁵. I punti rilevanti, riguardo alle condizioni di compatibilità, sono:

⁴La ragione della definizione con il meno davanti a b_k^l nell'equazione (8.6) apparirà chiara quando calcoleremo esplicitamente i b_k^l .

⁵Perché non vi era questa condizione nelle equazioni di Frenet? Perché ivi avevamo solamente derivate prime, e non vi era nulla da commutare. Operare su una curva è analogo a operare con \mathbb{R} , dove assegnata una funzione $f(x)$, sotto certe ipotesi non abbiamo problemi a trovare una funzione che derivata restituisca f . Con le superfici, analogamente a \mathbb{R}^2 , questo non è più vero: dobbiamo imporre l'uguaglianza delle derivate in croce.

- i coefficienti delle matrici di Cartan devono soddisfare delle condizioni di integrabilità che provengono da:

$$\frac{\partial^2 \vec{g}_i}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial^2 \vec{g}_i}{\partial u^k \partial u^j}$$

- i coefficienti di Gauss-Weingarten sono funzioni note di **I** e di **II**, fatto che mostra l'analogia tra (**I**, **II**) e (k, τ) . In questo risultato è contenuta implicitamente l'affermazione che **I** e **II** formano un sistema completo per S ; in altre parole: ci forniscono tutte le informazioni di cui abbiamo bisogno.

Combinando i due punti, si ricava che **I** e **II** devono soddisfare il sistema di equazioni differenziali (alle derivate parziali) non lineari del second'ordine trovato nel paragrafo 8.1 (le condizioni di Gauss-Mainardi-Codazzi).

Per capire e semplificare la struttura delle condizioni di risolubilità (sui coefficienti della matrice di Cartan, affinché esista la base di Gauss) conviene usare una notazione matriciale. Abbiamo che:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{g}_1}{\partial u^k} \\ \frac{\partial \vec{g}_2}{\partial u^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial \vec{g}_n}{\partial u^k} \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1k}^1 & \Gamma_{1k}^2 & \cdots & \Gamma_{1k}^n & a_{1k} \\ \Gamma_{2k}^1 & \Gamma_{2k}^2 & \cdots & \Gamma_{2k}^n & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{nk}^1 & \Gamma_{nk}^2 & \cdots & \Gamma_{nk}^n & a_{nk} \\ -b_1^k & -b_2^k & \cdots & -b_n^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vdots \\ \vec{g}_n \\ \vec{N} \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Al variare di k (ossia dell'indice rispetto a cui derivo), queste sono n equazioni matriciali. Chiamiamo $\frac{\partial \vec{G}}{\partial u^k}$ il vettore di vettori che si trova al primo membro: esso contiene le derivate dei vettori della base di Gauss rispetto all'indice k fissato. Chiamiamo Ω_k la matrice al secondo membro: al variare di k , essa è la **matrice di Cartan** rispetto a un particolare indice k di derivazione. Chiamiamo le matrici $\Gamma_k := \Gamma_{ik}^l$ (con l indice di riga, i indice di colonna e k indice di matrice) **matrici di connessione**. Chiamiamo, infine \vec{G} il vettore al secondo membro: esso è un vettore di vettori, dal momento che i suoi elementi sono i vettori della base di Gauss. Possiamo così riscrivere l'equazione (8.8) in forma più compatta:

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial u^k} = \Omega_k \cdot \vec{G} \quad (8.9)$$

Basta ora imporre la compatibilità delle derivate seconde per ottenere le condizioni necessarie di risolubilità⁶. Abbiamo infatti che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial u^j \partial u^k} &= \frac{\partial}{\partial u^j} (\Omega_k \vec{G}) = \frac{\partial \Omega_k}{\partial u^j} \vec{G} + \Omega_k \frac{\partial \vec{G}}{\partial u^j} = \\ &= \frac{\partial \Omega_k}{\partial u^j} \vec{G} + \Omega_k (\Omega_j \vec{G}) = \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial u^j} + \Omega_k \Omega_j \right) \vec{G} \end{aligned} \quad (8.10)$$

e tale espressione deve commutare in j e k , dal momento che deve essere uguale a:

$$\frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial u^k \partial u^j} = \left(\frac{\partial \Omega_j}{\partial u^k} + \Omega_j \Omega_k \right) \vec{G} \quad (8.11)$$

Dunque:

$$\left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial u^j} + \Omega_k \Omega_j \right) \vec{G} = \left(\frac{\partial \Omega_j}{\partial u^k} + \Omega_j \Omega_k \right) \vec{G}$$

o anche:

$$\left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial u^j} + \Omega_k \Omega_j - \frac{\partial \Omega_j}{\partial u^k} - \Omega_j \Omega_k \right) \vec{G} = 0 \quad (8.12)$$

Ma, dal momento che i vettori di \vec{G} è una base per \mathbb{R}^{n+1} , essi sono linearmente indipendenti; quella espressa dall'equazione (8.12) non è altro che una combinazione lineare dei vettori di base. Dato che questa deve essere pari al vettore nullo, per l'indipendenza lineare dei vettori di base deduciamo che necessariamente deve essere:

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial u^j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial u^k} + \Omega_k \Omega_j - \Omega_j \Omega_k = 0 \quad (8.13)$$

ove è chiara l'antisimmetria in j e k . Tale equazione matriciale vale per ogni scelta di j e k , in particolare abbiamo $j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, n$. Se mettiamo i valori di (j, k) in una matrice:

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \cdots & (1, n-1) & (1, n) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \cdots & (2, n-1) & (2, n) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \cdots & (3, n-1) & (3, n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1, 1) & (n-1, 2) & (n-1, 3) & \cdots & (n-1, n-1) & (n-1, n) \\ (n, 1) & (n, 2) & (n, 3) & \cdots & (n, n-1) & (n, n) \end{pmatrix}$$

osserviamo che le condizioni effettive sono meno di n^2 , poiché, in virtù dell'antisimmetria della (8.13), per elementi di posto simmetrico la condizione

⁶Si badi bene che, per quanto detto fino ad ora, le condizioni sono solamente necessarie. Si può tuttavia dimostrare che tali condizioni sono anche sufficienti.

risulta essere la stessa e per elementi sulla diagonale ($j = k$) la condizione è automaticamente verificata ($0 = 0$). Dobbiamo quindi solo computare il numero di elementi delle diagonali parallele alla diagonale principale, nella matrice triangolare superiore (escludendo la diagonale principale); dunque il numero di elementi della diagonale che parte dall'elemento $(1, 2)$ più il numero di elementi della diagonale che parte dall'elemento $(1, 3)$, e così via, sino ad arrivare all'elemento $(1, n)$. Banalmente, il numero di condizioni effettive è dunque $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n - 1)}{2}$.

8.2.1 Analogia: rotore

Le equazioni (8.13) sono dunque $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni di **tipo rotore**. Per mostrare meglio questa analogia, torniamo a \mathbb{R}^3 e ricordiamo che un campo vettoriale $\vec{w}(x, y, z)$ su \mathbb{R}^3 è conservativo se:

$$\vec{w}(x, y, z) \cdot dP = dU(x, y, z)$$

ovvero:

$$w_x dx + w_y dy + w_z dz = dU$$

Abbiamo così associato al campo una 1-forma (una forma differenziale di grado 1), cioè quella che si trova al primo membro, e chiediamo che tale forma sia esatta, vale a dire, sia uguale al differenziale di una qualche funzione $U(x, y, z)$. Dato che

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

la forma è esatta se e solo se i coefficienti dei differenziali coincidono, ovvero se:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_x(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \\ w_y(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial y} \\ w_z(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad (8.14)$$

Abbiamo così tre condizioni per trovare una sola funzione U : in generale è chiedere troppo. La condizione di risolubilità per il sistema si ottiene ancora una volta imponendo l'uguaglianza delle derivate miste:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\end{aligned}$$

e dunque, derivando le equazioni del sistema (8.14), si ricavano agevolmente che condizioni necessarie per l'esistenza di U :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial x} = R_{xy} = 0 \\ \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} = R_{xz} = 0 \\ \frac{\partial w_y}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial y} = R_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (8.15)$$

Il vettore

$$\overrightarrow{\text{rot} w} := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{\nabla} \\ \vec{w} \end{vmatrix} = -(R_{xy}\vec{k} + R_{yz}\vec{i} + R_{xz}\vec{j})$$

è una 2-forma differenziale che viene definita **rotore** del campo vettoriale \vec{w} . Si noti l'analogia delle equazioni (8.15) con le equazioni (8.13): tutte le condizioni che derivano dall'uguaglianza delle derivate in croce sono di tipo rotore.

Esempio: spazio tridimensionale. Consideriamo il caso di $n = 2$. Abbiamo le due matrici di Cartan, ottenute derivando i vettori della base naturale rispettivamente rispetto a u_1 e rispetto a u_2 . Le matrici sono:

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & a_{11} \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & a_{21} \\ b_1^1 & b_1^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & a_{12} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & a_{22} \\ b_2^1 & b_2^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

e dobbiamo imporre la condizione di compatibilità⁷ data dalla (8.13):

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial u^1} + \Omega_1 \Omega_2 - \Omega_2 \Omega_1 = 0$$

o anche:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial u^1} = \Omega_2 \Omega_1 - \Omega_1 \Omega_2$$

⁷Si noti che nel caso di $n = 2$ il numero di condizioni è $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, come era logico prevedere, dato che l'unica permutazione delle derivate in croce è data dallo scambio degli indici 1 e 2.

Calcoliamoci ora separatamente i membri dell'uguaglianza:

$$\begin{aligned}
 A = \frac{\partial \Omega_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial u^1} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial a_{21}}{\partial u^2} \\ \frac{\partial b_1^1}{\partial u^2} & \frac{\partial b_1^2}{\partial u^2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial a_{12}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial b_2^1}{\partial u^1} & \frac{\partial b_2^2}{\partial u^1} & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial a_{12}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial a_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial b_1^1}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2^1}{\partial u^1} & \frac{\partial b_1^2}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2^2}{\partial u^1} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B = \Omega_2 \Omega_1 - \Omega_1 \Omega_2 &= \\
 &= \begin{pmatrix} (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + a_{12} b_1^1) - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + a_{11} b_1^2) & (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + a_{12} b_1^2) - (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + a_{11} b_2^2) & (\Gamma_{12}^1 a_{11} + \Gamma_{12}^2 a_{21}) - (\Gamma_{11}^1 a_{12} + \Gamma_{11}^2 a_{22}) \\ (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + a_{22} b_1^1) - (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + a_{21} b_1^2) & (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 + a_{22} b_1^2) - (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 + a_{21} b_2^2) & (\Gamma_{22}^1 a_{11} + \Gamma_{22}^2 a_{21}) - (\Gamma_{21}^1 a_{12} + \Gamma_{21}^2 a_{22}) \\ (b_2^1 \Gamma_{11}^1 + b_2^2 \Gamma_{21}^1) - (b_1^1 \Gamma_{12}^1 + b_1^2 \Gamma_{22}^1) & (b_2^1 \Gamma_{11}^2 + b_2^2 \Gamma_{21}^2) - (b_1^1 \Gamma_{12}^2 + b_1^2 \Gamma_{22}^2) & (b_2^1 a_{11} + b_2^2 a_{21}) - (b_1^1 a_{12} + b_1^2 a_{22}) \end{pmatrix} \quad (8.18)
 \end{aligned}$$

Eguagliando ciascun elemento di A e di B si trovano nove condizioni (di cui l'ultima banalmente verificata) di compatibilità. Ad esempio, per il posto (1, 1) troviamo che

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 = a_{12} b_1^1 - a_{11} b_2^1 \quad (8.19)$$

Vedremo tra poco che il primo membro sarà una componente del tensore di curvatura di Riemann. Inoltre, vedremo anche che i coefficienti Γ si calcoleranno utilizzando solo la prima forma, mentre i coefficienti a saranno i coefficienti di **II** e i coefficienti b saranno i coefficienti dell'operatore di forma. Sostanzialmente gli a e b spettano alla seconda forma, mentre i Γ spettano alla prima. Il contenuto concettuale dell'uguaglianza (8.19) è di assoluto rilievo: in un certo modo, crea un legame tra la prima e la seconda forma, che compaiono distinte ai due membri dell'equazione.

Capitolo 9

Il Theorema Egregium

9.1 Tensore di Riemann

9.1.1 Struttura delle condizioni di risolubilità

Ritorniamo al caso $n + 1$ -dimensionale. Abbiamo visto (equazione (8.13)) che

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial u^j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial u^k} + \Omega_k \Omega_j - \Omega_j \Omega_k = 0$$

Definiamo dunque¹:

$$\tilde{R}_{jk} := \frac{\partial \Omega_k}{\partial u^j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial u^k} + \Omega_k \Omega_j - \Omega_j \Omega_k \quad (9.1)$$

Si dice che le matrici Ω_j sono i coefficienti della forma differenziale $\sum_j \Omega_j du_j$ della **1-forma di connessione**. Si dice inoltre che le matrici \tilde{R}_{jk} sono i coefficienti di una 2-forma detta **2-forma di curvatura**.

Possiamo agevolmente estendere quanto trovato con l'equazione (8.19) a un caso più generale. Dalle equazioni di Gauss abbiamo che, $\forall q, \forall j$:

$$\frac{\partial \vec{g}_q}{\partial u^j} = \Gamma_{qj}^l \vec{g}_l + a_{qj} \vec{N}$$

¹Il perché definiamo tale elemento con la tilde sarà più chiaro in seguito; per ora basti sapere che dovremo definire una matrice leggermente diversa da \tilde{R}_{jk} , che chiameremo R_{jk} .

e quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vec{g}_q}{\partial u^k \partial u^j} &= \frac{\partial \Gamma_{qj}^l}{\partial u^k} \vec{g}_l + \Gamma_{qj}^l \frac{\partial \vec{g}_q}{\partial u^k} + \frac{\partial a_{qj}}{\partial u^k} \vec{N} + a_{qj} \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} = \\
&= \frac{\partial \Gamma_{qj}^p}{\partial u^k} \vec{g}_p + \Gamma_{qj}^l (\Gamma_{lk}^p \vec{g}_p + a_{lk} \vec{N}) + \frac{\partial a_{qj}}{\partial u^k} \vec{N} + a_{qj} (b_k^p \vec{g}_p) = \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma_{qj}^p}{\partial u^k} + \Gamma_{qj}^l \Gamma_{lk}^p + a_{qj} b_k^p \right) \vec{g}_p + \left(\frac{\partial a_{qj}}{\partial u^k} + \Gamma_{qj}^l a_{lk} \right) \vec{N} \quad (9.2)
\end{aligned}$$

E visto che le derivate incrociate devono essere uguali (per il teorema di Schwarz), i coefficienti devono essere simmetrici rispetto a k e a j . Ovvero, deve essere:

$$\frac{\partial^2 \vec{g}_q}{\partial u^k \partial u^j} - \frac{\partial^2 \vec{g}_q}{\partial u^j \partial u^k} = 0$$

Per i coefficienti di \vec{g}_p , questo si traduce in:

$$\frac{\partial \Gamma_{qj}^p}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^p}{\partial u^j} + \Gamma_{qj}^l \Gamma_{lk}^p - \Gamma_{qk}^l \Gamma_{lj}^p = a_{qk} b_j^p - a_{qj} b_k^p \quad (9.3)$$

Per definizione chiamiamo:

$$R_{qjk}^p := \frac{\partial \Gamma_{qj}^p}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^p}{\partial u^j} + \Gamma_{qj}^l \Gamma_{lk}^p - \Gamma_{qk}^l \Gamma_{lj}^p \quad (9.4)$$

e dunque abbiamo che per la parte tangente le condizioni di compatibilità (dette **equazioni di Gauss**) sono:

$$R_{qjk}^p = a_{qk} b_j^p - a_{qj} b_k^p \quad (9.5)$$

Fissati j e k , la matrice degli R_{qjk}^p avente p come indice di riga e q come indice di colonna² verrà chiamata $R_{jk} := (R_{qjk}^p)$ - rimarcheremo meglio in seguito la differenza da \tilde{R}_{qjk}^p .

Per quanto riguarda invece la parte in \vec{N} , l'uguaglianza dei coefficienti si traduce nelle **equazioni di Mainardi-Codazzi**:

$$\frac{\partial a_{qj}}{\partial u^k} - \frac{\partial a_{qk}}{\partial u^j} + \Gamma_{qj}^l a_{lk} - \Gamma_{qk}^l a_{lj} = 0 \quad (9.6)$$

Ci sarebbero poi da porre anche le condizioni di compatibilità sull'uguaglianza delle derivate in croce della normale \vec{N} , ossia:

$$\frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial u^k \partial u^j} = \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial u^j \partial u^k}$$

²Si noti che, analogamente a quanto abbiamo fatto per le matrici di connessione, l'elemento in posizione controvariante è indice di riga, quello in posizione covariante è indice di colonna. Tale scelta sarà utile poiché semplificherà - vedremo - la scrittura del tensore di Riemann in forma covariante.

Tuttavia si può dimostrare che tali equazioni sono conseguenza delle equazioni di Mainardi-Codazzi.

9.1.2 Significato del tensore di Riemann

Consideriamo le n matrici Ω_j : ciascuna di esse può essere derivata rispetto a n indici (ciascuno corrispondente ad un valore di k): otteniamo così n^2 matrici, ognuna per ogni coppia di valori (j, k) . In breve la struttura che abbiamo è la seguente:

$$\Omega_j = \begin{array}{|c|c|} \hline \Gamma_j & a_j \\ \hline b_j & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \tilde{R}_{jk} = \begin{array}{|c|c|} \hline R_{qjk}^p + \dots & \text{MC} \\ \hline \text{MC} & 0 \\ \hline \end{array} \quad (9.7)$$

dove MC indica la parte di matrice che compete alle condizioni di Mainardi-Codazzi, mentre i puntini indicano altri elementi dipendenti dai coefficienti a e b . Gli indici p e q sono gli indici di posto del coefficiente R_{qjk}^p all'interno della matrice determinata dalla coppia di indici (j, k) . Dunque le due coppie di indici sono in un certo modo a sé stanti. Le funzioni R_{qjk}^p , indicizzate da quattro indici, prendono il nome di **componenti del tensore curvatura di Riemann**. Le condizioni di Gauss (9.5) esprimono appunto le relazioni che sussistono tra tali componenti e i coefficienti a e b , dato che deve essere che $\tilde{R}_{jk} = 0$.

Lo scopo dell'introduzione del tensore di Riemann è, per noi, dedurre dalle condizioni di compatibilità di Gauss il Theorema Egregium (per superfici nello spazio euclideo, vale a dire $n = 2$), mostrando che:

- per $n = 2$ il tensore di Riemann ha una sola componente essenziale, funzione solo di \mathbf{I} ;
- per $n = 2$ il secondo membro delle condizioni di compatibilità di Gauss³ è esattamente $-\frac{\det \widehat{\mathbf{II}}}{\det \widehat{\mathbf{I}}}$.

Mostrando questo avremmo automaticamente dimostrato che la curvatura gaussiana K è solamente funzione di \mathbf{I} , ossia la tesi del Theorema Egregium.

³Si badi al corretto utilizzo del lessico: si parla di *equazioni di Gauss* per indicare i legami tra le derivate dei vettori della base naturale e la base stessa; si parla di *condizioni di Gauss* per le loro conseguenze differenziali.

9.2 Calcolo dei coefficienti di Gauss-Weingarten

Prima di dimostrare formalmente il Theorema Egregium, dobbiamo però mostrare che tutti i coefficienti Γ , a e b che compaiono nelle equazioni di Gauss-Weingarten sono funzioni (algebriche o differenziali) dei coefficienti della prima e della seconda forma. Per farlo, ci ricordiamo che i vettori \vec{g}_j sono i vettori della base canonica, vale a dire le derivate prime di P .

Calcolo degli a_{jk} . Dalla (8.5) e dalla (8.6) sappiamo che:

$$\frac{\partial \vec{g}_j}{\partial u^k} = \Gamma_{jk}^l \vec{g}_l + a_{jk} \vec{N}$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} = -b_k^l \vec{g}_l$$

dunque i coefficienti a_{jk} sono la parte normale delle derivate seconde di P ; da cui $\vec{g}_j \perp \vec{N} \quad \forall j$, e quindi:

$$a_{jk} = (\Gamma_{jk}^l \vec{g}_l + a_{jk} \vec{N}) \cdot \vec{N} = \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial u^k} \cdot \vec{N} = \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^j \partial u^k} \quad (9.8)$$

che sono esattamente i coefficienti della seconda forma. Dunque abbiamo che i coefficienti a sono i coefficienti di **II**.

Calcolo degli b_k^l . Analogamente abbiamo che, indicando con g_{lm} gli elementi del tensore metrico (ossia i coefficienti della prima forma⁴):

$$b_k^l g_{lm} = b_k^l \vec{g}_l \cdot \vec{g}_m = -\frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} \cdot \vec{g}_m = \frac{\partial}{\partial u^k} (\vec{N} \cdot \vec{g}_m) - (-\vec{N} \cdot \frac{\partial \vec{g}_m}{\partial u^k}) = \vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^k \partial u^m} \quad (9.9)$$

dove la penultima uguaglianza vale per la regola di Leibniz. Da cui, considerando il primo e l'ultimo membro dell'uguaglianza:

$$b_k^l = g^{lm} \left(\vec{N} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^k \partial u^m} \right) \quad (9.10)$$

o ancora, più sinteticamente:

$$(b_k^l) = \widehat{\mathbf{I}}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{II}} = S \quad (9.11)$$

Notiamo dunque che i b_k^l sono i coefficienti della matrice S dell'operatore di forma S_P . Sono dunque funzioni della prima e della seconda forma fondamentali.

⁴Nella notazione tensoriale si fa uso della seguente utile convenzione. Data una matrice P identificata dal generico elemento p_{ij} di riga i -esima e colonna j -esima, la scrittura p^{ij} indica l'elemento di riga i -esima e colonna j -esima della corrispondente matrice inversa P^{-1} .

Calcolo dei simboli di Christoffel Γ_{jk}^l . Partiamo dalle derivate degli elementi del tensore metrico, e dimostriamo il cosiddetto **lemma di Ricci**:

Lemma 9.1 (Ricci).

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} = \Gamma_{jl}^p g_{pk} + \Gamma_{kl}^p g_{jp}$$

Dimostrazione. Infatti:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} = \frac{\partial}{\partial u^l} (\vec{g}_j \cdot \vec{g}_k)$$

e riscrivendo le derivate dei vettori della base grazie alle equazioni di Gauss ($\frac{\partial \vec{g}_j}{\partial u^l} = \Gamma_{jl}^p \vec{g}_p + a_{jl} \vec{N}$), abbiamo che:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} = (\Gamma_{jl}^p \vec{g}_p + a_{jl} \vec{N}) \cdot \vec{g}_k + \vec{g}_j \cdot (\Gamma_{kl}^p \vec{g}_p + a_{kl} \vec{N})$$

ma considerando l'ortogonalità di \vec{N} e \vec{g}_j , i termini normali scompaiono e si ha

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} = \Gamma_{jl}^p \vec{g}_p \cdot \vec{g}_k + \Gamma_{kl}^p \vec{g}_j \cdot \vec{g}_p = \Gamma_{jl}^p g_{pk} + \Gamma_{kl}^p g_{jp}$$

ossia la tesi. \square

Il Lemma di Ricci lega i simboli di Christoffel con i coefficienti della prima forma. Per ogni scelta di p abbiamo (per simmetria negli indici covarianti) solo $\frac{n(n+1)}{2}$ valori assunti da Γ_{jl}^p (per la simmetria di Γ negli indici in posizione covariante). Dato che p può assumere valori da 1 a n , abbiamo che la tesi del lemma di Ricci è anche un sistema lineare di $\frac{n^2(n+1)}{2}$ equazioni nelle $\frac{n^2(n+1)}{2}$ incognite Γ_{jl}^p . Per risolverlo agiamo nel seguente modo. Sappiamo dal Lemma di Ricci che:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} = \Gamma_{jl}^p g_{pk} + \Gamma_{kl}^p g_{jp} \quad (9.12)$$

Cambiando nome agli indici, il risultato non può cambiare; applichiamo

dunque una permutazione degli indici nel seguente modo: $\begin{cases} l \rightarrow j \\ j \rightarrow k \\ k \rightarrow l \end{cases}$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} = \Gamma_{kj}^p g_{pl} + \Gamma_{lj}^p g_{kp} \quad (9.13)$$

e infine applichiamo ancora la stessa permutazione: $\begin{cases} l \rightarrow j \\ j \rightarrow k \\ k \rightarrow l \end{cases}$

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} = \Gamma_{lk}^p g_{pj} + \Gamma_{jk}^p g_{lp} \quad (9.14)$$

A questo punto sommiamo membro a membro la (9.12) e la (9.13) e facciamo quindi la differenza membro a membro con la (9.14). Con questo trucco, abbiamo che al secondo membro molti termini si elidono, e rimane:

$$\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} \right) = 2\Gamma_{jl}^p g_{kp} \quad (9.15)$$

e abbiamo ottenuto una relazione contenente un solo simbolo di Christoffel. Dato che la matrice della metrica (di termine generale g_{kp}) è invertibile, denotando con g^{kp} l'elemento della matrice inversa della metrica, abbiamo immediatamente che:

$$\Gamma_{jl}^p = \frac{1}{2} g^{pk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} \right) \quad (9.16)$$

dove la scrittura di pk in luogo di kp vale per la simmetria del tensore metrico.

Esempio: spazio tridimensionale. Colleghiamo innanzitutto le notazioni tensoriali usate nella teoria astratta con le notazioni gaussiane. Abbiamo che:

$$[g_{jk}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$[g^{pq}] = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

da cui si ha

$$\begin{cases} g^{11} = \frac{G}{EG - F^2} \\ g^{12} = g^{21} = -\frac{F}{EG - F^2} \\ g^{22} = \frac{E}{EG - F^2} \end{cases}$$

Poi, ricordandoci che i coefficienti a erano i coefficienti di \mathbf{II} , riscriviamo esplicitamente le equazioni di Gauss nel caso $n = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{(\partial u^1)^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial P}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial P}{\partial u^2} + e\vec{N} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2 \partial u^1} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial P}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial P}{\partial u^2} + f\vec{N} \\ \frac{\partial^2 P}{(\partial u^2)^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial P}{\partial u^1} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial P}{\partial u^2} + g\vec{N} \end{array} \right. \quad (9.17)$$

Per il calcolo dei simboli di Christoffel si proietta ogni equazione sulla base naturale. Dalle tre equazioni che avevamo, così facendo ne otteniamo 6 (i termini normali si elidono nell'operazione di prodotto scalare con i vettori della base):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{(\partial u^1)^2} \frac{\partial P}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ \frac{\partial^2 P}{(\partial u^1)^2} \frac{\partial P}{\partial u^2} = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{\partial u^1 \partial u^2} \frac{\partial P}{\partial u^1} = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\ \frac{\partial^2 P}{\partial u^1 \partial u^2} \frac{\partial P}{\partial u^2} = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{(\partial u^2)^2} \frac{\partial P}{\partial u^1} = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\ \frac{\partial^2 P}{(\partial u^2)^2} \frac{\partial P}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (9.18)$$

Rimane solo da esprimere il primo membro nella forma di derivate dei prodotti scalari dei vettori della base naturale (e quindi di \mathbf{I}). Scrivere il primo termine è facile:

$$\frac{\partial^2 P}{(\partial u^1)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^1} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial P}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1}$$

Più complicato è, ad esempio scrivere $\frac{\partial^2 P}{(\partial u^1)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2}$. Tuttavia possiamo combinare la seconda equazione con la terza, ottenendo che, al primo membro:

$$\frac{\partial^2 P}{(\partial u^1)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial u^1 \partial u^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^1} = \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial P}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial F}{\partial u^1}$$

La terza equazione la riscriviamo senza bisogno di combinarla linearmente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^1 \partial u^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^1} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial P}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2}$$

e analogamente per la quarta equazione:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^1 \partial u^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\partial P}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1}$$

Per la quinta equazione dobbiamo ricorrere ancora a combinarla linearmente con la quarta:

$$\frac{\partial^2 P}{(\partial u^2)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^1} + \frac{\partial^2 P}{\partial u^1 \partial u^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial P}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial F}{\partial u^2}$$

Infine per l'ultima equazione:

$$\frac{\partial^2 P}{(\partial u^2)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\partial P}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2}$$

Riscriviamo dunque il sistema precedente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ \frac{\partial F}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \\ \frac{\partial F}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \end{array} \right. \quad (9.19)$$

o, in modo del tutto analogo:

$$\begin{pmatrix} E & F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & G & E & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & G & E & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} \\ \frac{\partial F}{\partial u^1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} \\ \frac{\partial F}{\partial u^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

Abbiamo quindi riscritto il sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite facendo comparire le derivate parziali di E, F, G . Chiamiamo A la matrice di tale sistema e sviluppiamone il determinante rispetto alla prima riga:

$$\begin{aligned} \det A &= EG(EG(EG-F^2)-F^2(EG-F^2))-F^2(EG(EG-F^2)-F^2(EG-F^2)) = \\ &= EG(EG-F^2)^2 - F^2(EG-F^2)^2 = (EG-F^2)^3 \end{aligned}$$

Chiamiamo per brevità di scrittura $\mathbf{I} := \det \hat{\mathbf{I}} = EG - F^2$, da cui abbiamo che $\det A = \mathbf{I}^3$, e risolvendo il sistema con il metodo di Cramer:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} & F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u^1} & G & E & F & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} & 0 & E & F & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} & 0 & F & G & 0 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u^2} & 0 & F & G & E & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} & 0 & 0 & 0 & F & G \end{vmatrix}}{\det A} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} G(EG\mathbf{I} - F^2\mathbf{I}) - F[\frac{\partial F}{\partial u^1} \mathbf{I}^2 - E(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} G\mathbf{I} - F \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} \mathbf{I}) + F(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} F\mathbf{I} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} E\mathbf{I})]}{\mathbf{I}^3} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} G\mathbf{I}^2 - F[\frac{\partial F}{\partial u^1} \mathbf{I}^2 - E \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} G\mathbf{I} + EF \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} \mathbf{I} + F^2 \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} \mathbf{I} - EF \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} \mathbf{I}]}{\mathbf{I}^3} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} G\mathbf{I}^2 - F \frac{\partial F}{\partial u^1} \mathbf{I}^2 + EF \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} G\mathbf{I} - F^3 \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} \mathbf{I}}{\mathbf{I}^3} = \\ &= \frac{\mathbf{I}^2(G \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} - F \frac{\partial F}{\partial u^1}) + F\mathbf{I} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} (EG - F^2)}{\mathbf{I}^3} = \frac{\mathbf{I}^2(G \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} - F \frac{\partial F}{\partial u^1}) + F\mathbf{I}^2 \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2}}{\mathbf{I}^3} = \\ &= \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(G \frac{\partial E}{\partial u^1} - 2F \frac{\partial F}{\partial u^1} + F \frac{\partial E}{\partial u^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & \frac{\partial F}{\partial u^1} & E & F & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} & E & F & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} & F & G & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F}{\partial u^2} & F & G & E & F \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} & 0 & 0 & F & G \end{vmatrix}}{\det A} = \\
&= \frac{E[\frac{\partial F}{\partial u^1}(EG\mathbf{I} - F^2\mathbf{I}) - E(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}G\mathbf{I} - F\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}\mathbf{I}) + F(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}F\mathbf{I} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}E\mathbf{I})] - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^1}F\mathbf{I}^2}{\mathbf{I}^3} = \\
&= \frac{E[\frac{\partial F}{\partial u^1}\mathbf{I}^2 - E\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}G\mathbf{I} - EF\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}\mathbf{I} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}F^2\mathbf{I} - EF\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}\mathbf{I}] - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^1}F\mathbf{I}^2}{\mathbf{I}^3} = \\
&= \frac{E\frac{\partial F}{\partial u^1}\mathbf{I}^2 - E\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}\mathbf{I}(EG - F^2) - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^1}F\mathbf{I}^2}{\mathbf{I}^3} = \frac{E\frac{\partial F}{\partial u^1}\mathbf{I}^2 - E\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}\mathbf{I}^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^1}F\mathbf{I}^2}{\mathbf{I}^3} = \\
&= \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(2E\frac{\partial F}{\partial u^1} - E\frac{\partial E}{\partial u^2} - F\frac{\partial E}{\partial u^1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{\begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} & 0 & 0 & 0 \\ F & G & \frac{\partial F}{\partial u^1} & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial u^2} & G & E & F \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} & 0 & F & G \end{vmatrix}}{\det A} = \\
&= \frac{EG(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}G\mathbf{I} - F\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}\mathbf{I}) - F^2(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}G\mathbf{I} - F\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1}\mathbf{I})}{\mathbf{I}^3} = \\
&= \frac{(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2}G - F\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u^1})\mathbf{I}^2}{\mathbf{I}^3} = \\
&= \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(G\frac{\partial E}{\partial u^2} - F\frac{\partial G}{\partial u^1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{\begin{vmatrix} E & F & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} & 0 & 0 \\ F & G & E & \frac{\partial F}{\partial u^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & \frac{\partial F}{\partial u^2} & E & F \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} & F & G \end{vmatrix}}{\det A} = \\
 &= \frac{EG(E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} F \mathbf{I}) - F^2(E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} F \mathbf{I})}{\mathbf{I}^3} = \\
 &= \frac{(E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} F) \mathbf{I}^2}{\mathbf{I}^3} = \\
 &= \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(E \frac{\partial G}{\partial u^1} - F \frac{\partial E}{\partial u^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{\begin{vmatrix} E & F & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} & 0 \\ F & G & E & F & \frac{\partial F}{\partial u^1} & 0 \\ 0 & 0 & E & F & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} & 0 \\ 0 & 0 & F & G & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} & 0 \\ 0 & 0 & F & G & \frac{\partial F}{\partial u^2} & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} & G \end{vmatrix}}{\det A} = \\
 &= \frac{EG[E(G(\frac{\partial F}{\partial u^2} G - F \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2})) - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} G^2] - F(F(\frac{\partial F}{\partial u^2} G - F \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2})) - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} FG] + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} (FG^2 - G^2 F)}{\mathbf{I}^3} + \\
 &- \frac{F^2[E(G(\frac{\partial F}{\partial u^2} G - F \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2})) - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} G^2] - F(F(\frac{\partial F}{\partial u^2} G - F \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2})) - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} FG] + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} (FG^2 - G^2 F)}{\mathbf{I}^3} = \\
 &= \frac{\mathbf{I}[EG \frac{\partial F}{\partial u^2} G - EGF \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} - E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} G^2 - F^2 \frac{\partial F}{\partial u^2} G + F^3 \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} F^2 G]}{\mathbf{I}^3} = \\
 &= \frac{\mathbf{I}[\frac{\partial F}{\partial u^2} G(EG - F^2) - F \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} (EG - F^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} G(EG - F^2)]}{\mathbf{I}^3} = \\
 &= \frac{\mathbf{I}^2[G \frac{\partial F}{\partial u^2} - F \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} - G \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1}]}{\mathbf{I}^3} = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(2G \frac{\partial F}{\partial u^2} - F \frac{\partial G}{\partial u^2} - G \frac{\partial G}{\partial u^1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^2 &= \frac{\det A}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} E & F & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^1} \\ F & G & E & F & 0 & \frac{\partial F}{\partial u^1} \\ 0 & 0 & E & F & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} \\ 0 & 0 & F & G & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} \\ 0 & 0 & F & G & E & \frac{\partial F}{\partial u^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} \end{vmatrix}}{\det A} = \\
&= \frac{EG[E(G(E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} - F \frac{\partial F}{\partial u^2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} GF) - F(F(E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} - F \frac{\partial F}{\partial u^2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} F^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} F(FG - GF)]}{\mathbf{I}^3} + \\
&- \frac{F^2[E(G(E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} - F \frac{\partial F}{\partial u^2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} GF) - F(F(E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} - F \frac{\partial F}{\partial u^2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} F^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u^2} F(FG - GF)]}{\mathbf{I}^3} = \\
&= \frac{\mathbf{I}[EGE \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} - EGF \frac{\partial F}{\partial u^2} + E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} GF - F^2 E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} + F^3 \frac{\partial F}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} F^2]}{\mathbf{I}^3} = \\
&= \frac{\mathbf{I}[E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} (EG - F^2) - F \frac{\partial F}{\partial u^2} (EG - F^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1} F(EG - F^2)]}{\mathbf{I}^3} = \\
&= \frac{\mathbf{I}^2[E \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^2} - F \frac{\partial F}{\partial u^2} + F \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u^1}]}{\mathbf{I}^3} = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(E \frac{\partial G}{\partial u^2} - 2F \frac{\partial F}{\partial u^2} + F \frac{\partial G}{\partial u^1} \right)
\end{aligned}$$

Riassumendo brevemente:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(G \frac{\partial E}{\partial u^1} - 2F \frac{\partial F}{\partial u^1} + F \frac{\partial E}{\partial u^2} \right) \\
\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(2E \frac{\partial F}{\partial u^1} - E \frac{\partial E}{\partial u^2} - F \frac{\partial E}{\partial u^1} \right) \\
\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(G \frac{\partial E}{\partial u^2} - F \frac{\partial G}{\partial u^1} \right) \\
\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(E \frac{\partial G}{\partial u^1} - F \frac{\partial E}{\partial u^2} \right) \\
\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(2G \frac{\partial F}{\partial u^2} - F \frac{\partial G}{\partial u^2} - G \frac{\partial G}{\partial u^1} \right) \\
\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(E \frac{\partial G}{\partial u^2} - 2F \frac{\partial F}{\partial u^2} + F \frac{\partial G}{\partial u^1} \right)
\end{array} \right. \quad (9.21)$$

e se $F = 0$ (cioè la base naturale è ortogonale, visto che il prodotto scalare

$F := \frac{\partial P}{\partial u^1} \frac{\partial P}{\partial u^2}$ risulta nullo) tali espressioni si semplificano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u^1} \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial u^2} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u^2} \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^1} \\ \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u^1} \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u^2} \end{array} \right. \quad (9.22)$$

D'altra parte sussistono anche le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial}{\partial u^1} (\ln \sqrt{EG - F^2}) \\ \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial}{\partial u^2} (\ln \sqrt{EG - F^2}) \end{array} \right. \quad (9.23)$$

che si verificano facilmente a ritroso, a partire dal secondo membro (derivazione di funzione composta):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^1} (\ln \sqrt{EG - F^2}) &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial u^1} G + \frac{\partial G}{\partial u^1} E - 2F \frac{\partial F}{\partial u^1} \right) = \\ &= \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(\frac{\partial E}{\partial u^1} G + \frac{\partial G}{\partial u^1} E - 2F \frac{\partial F}{\partial u^1} \right) = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^2} (\ln \sqrt{EG - F^2}) &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial u^2} G + \frac{\partial G}{\partial u^2} E - 2F \frac{\partial F}{\partial u^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2(EG - F^2)} \left(\frac{\partial E}{\partial u^2} G + \frac{\partial G}{\partial u^2} E - 2F \frac{\partial F}{\partial u^2} \right) = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \end{aligned}$$

9.2.1 Tavola riassuntiva

Ricapitoliamo brevemente le relazioni fondamentali:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial u^k} = \Gamma_{jk}^l \vec{g}_l + a_{jk} \vec{N} \quad (\text{Equazioni di Gauss}) \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^k} = -b_k^l \vec{g}_l \quad (\text{Equazioni di Weingarten}) \\ \Gamma_{jk}^l := \frac{1}{2} g^{lp} \left(\frac{\partial g_{pj}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^p} \right) \quad (\text{Simboli di Christoffel}) \\ R_{qjk}^p := \frac{\partial \Gamma_{qj}^p}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^p}{\partial u^j} + \Gamma_{qj}^l \Gamma_{lk}^p - \Gamma_{qk}^l \Gamma_{lj}^p \quad (\text{Componenti del tensore di Riemann}) \\ R_{qjk}^p = a_{qj} b_k^p - a_{qk} b_j^p \quad (\text{Condizioni di Gauss}) \\ \frac{\partial a_{qj}}{\partial u^k} - \frac{\partial a_{qk}}{\partial u^j} + \Gamma_{qj}^l a_{lk} - \Gamma_{qk}^l a_{lj} = 0 \quad (\text{Condizioni di Mainardi-Codazzi}) \end{array} \right.$$

9.3 Dimostrazione del Theorema Egregium

Combiniamo linearmente le componenti del tensore di Riemann con i coefficienti della metrica nel modo seguente:

$$R_{mqjk} := g_{mp} R_{qjk}^p \quad (9.24)$$

e chiamiamo l'elemento a quattro indici R_{mqjk} **tensore di Riemann in forma covariante** (poiché tutti gli indici sono in posizione covariante⁵). Otteniamo così una conseguenza delle condizioni di Gauss, vale a dire:

$$R_{mqjk} = a_{qj} (g_{mp} b_k^p) - a_{qk} (g_{mp} b_j^p) \quad (9.25)$$

Si notano le seguenti simmetrie nel tensore di Riemann in forma covariante:

- i. $R_{mqjk} = -R_{qmjk}$ (antisimmetria nella prima coppia di indici)
- ii. $R_{mqjk} = -R_{mqkj}$ (antisimmetria nella seconda coppia di indici)
- iii. $R_{mqjk} = R_{jkmq}$ (simmetria nello scambio delle coppie)

Dunque:

⁵Si noti che la notazione tensoriale aiuta mnemonicamente: per ricordarsi la (9.24) si può pensare che le due p in posizione covariante e controvariante si elidano, e restano così solo gli altri quattro indici in posizione covariante.

Lemma 9.2. *Per $n = 2$ il tensore di Riemann ha una sola componente fondamentale.*

Dimostrazione. Infatti, per antisimmetria nella prima coppia di indici, si ha che:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1111} = -R_{1111} = 0 \\ R_{1112} = -R_{1112} = 0 \\ R_{1121} = -R_{1121} = 0 \\ R_{1122} = -R_{1122} = 0 \\ R_{2211} = -R_{2211} = 0 \\ R_{2212} = -R_{2212} = 0 \\ R_{2221} = -R_{2221} = 0 \\ R_{2222} = -R_{2222} = 0 \end{array} \right.$$

e inoltre, per antisimmetria nella seconda coppia di indici, si ha anche che:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1211} = -R_{1211} = 0 \\ R_{2111} = -R_{2111} = 0 \\ R_{1222} = -R_{1222} = 0 \\ R_{2122} = -R_{2122} = 0 \end{array} \right.$$

Dunque tutte le componenti aventi una coppia di indici con indici uguali sono inevitabilmente nulle. D'altro canto, per le restanti componenti si ha che (per antisimmetria nelle due distinte coppie di indici e per simmetria tra le due coppie):

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}$$

ossia la tesi. \square

Ora non è difficile dimostrare il Theorema Egregium:

Theorema Egregium (Gauss). *La curvatura gaussiana K è una grandezza intrinseca.*

Dimostrazione. Il Lemma 9.2 ci mostra che per $n = 2$ il tensore di Riemann ha una sola componente fondamentale (scegliamo, tra le quattro, R_{1212}). Quindi le condizioni di compatibilità di Gauss (9.25) collassano a:

$$R_{1212} = a_{21}(g_{1p}b_2^p) - a_{12}(g_{1p}b_1^p) \quad (9.26)$$

Basta ora ricordare la definizione di a_{jk} e b_k^p (in particolare a_{jk} erano i coefficienti di \mathbf{II} e $b_k^p g_{pj} = a_{kj}$) e abbiamo che, l'unica componente

$$R_{1212} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\det \mathbf{II} \quad (9.27)$$

In altre parole, il determinante della seconda forma è l'unica componente essenziale del tensore di Riemann. D'altra parte tutti gli R_{mqjk} erano costruiti semplicemente a partire dalla metrica, e dunque erano grandezze intrinseche. Ne segue che, nonostante \mathbf{II} sia estrinseca, il suo determinante è intrinseco; o, ancora più esplicitamente:

$$K = \frac{\det \widehat{\mathbf{II}}}{\det \widehat{\mathbf{I}}} = -\frac{R_{1212}}{\sqrt{EG - F^2}} = f(\mathbf{I}) \quad (9.28)$$

ossia la tesi. \square

9.3.1 Formula di Brioschi

Dal momento che la curvatura gaussiana dipende solo dalla metrica, dovremmo essere in grado di trovare la formula generale di K in termini dei coefficienti della metrica. Infatti è dovuto a Brioschi il seguente teorema (per comodità di scrittura ritorniamo alla notazione (u, v) ponendo $u^1 = u$ e $u^2 = v$):

Teorema 9.3 (Brioschi).

$$K = -\frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & E & F & -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} & F & G & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{array} \right\} \quad (9.29)$$

Dimostrazione. Dall'equazione (6.23) sappiamo che $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$. D'altro canto, grazie la (6.7), possiamo scrivere esplicitamente il numeratore di tale frazione. Tutti i coefficienti della seconda forma hanno, nella loro scrittura esplicita, al denominatore $\sqrt{EG - F^2}$. Dunque possiamo riscrivere K come⁶:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right\}$$

⁶Lo slittamento delle righe nella scrittura di e , f e g , vale per quanto detto alla nota 5.

D'altro canto il determinante di una matrice è invariante per trasposizioni, dunque possiamo trasporre le seconde matrici nei prodotti:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right| + \\ - \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right| \end{array} \right\}$$

D'altro canto per la formula di Binet, il prodotto dei determinanti è il determinante del prodotto. Scriviamo dunque (in notazione più sintetica) le matrici prodotto, i cui elementi sono dati dal prodotto scalare di due vettori:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \end{array} \right| \end{array} \right\}$$

e sviluppando i determinanti sulle prime righe abbiamo che:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \right) \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \end{array} \right| + \\ - \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial P}{\partial u} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \end{array} \right| + \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial P}{\partial v} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} \end{array} \right| + \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial P}{\partial u} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \end{array} \right| + \\ - \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} & \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} & \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} \end{array} \right| \end{array} \right\} \quad (9.30)$$

Ma, discutendo sul sistema (9.18), abbiamo già trovato che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 P}{(\partial u)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 P}{(\partial u)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 P}{(\partial v)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 P}{(\partial v)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} \end{array} \right. \quad (9.31)$$

E riscrivendo la seconda e la quinta equazione inserendo al posto del secondo addendo al primo membro la sua scrittura (evinta dalle altre equazioni del sistema) troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{(\partial u)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 P}{(\partial v)^2} \cdot \frac{\partial P}{\partial u} &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \end{aligned} \quad (9.32)$$

Sostituendo tutte queste espressioni nella (9.35) otteniamo:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \right) \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} & G \end{vmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & E \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} & F \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & E \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F \end{vmatrix} \right\} \quad (9.33) \end{aligned}$$

D'altro canto, però (regola di Leibniz):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^3 P}{\partial v^2 \partial u} - \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} v \right) - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^3 P}{\partial v^2 \partial u} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \right) - \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \quad (9.34) \end{aligned}$$

Tale quantità, inserito nella (9.35), ci dà:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} & G \end{vmatrix} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & E \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} & F \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & F \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} & E \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} & F \end{vmatrix} \right\} \quad (9.35)$$

che è proprio la tesi del teorema, con i determinanti sviluppati rispetto alle prime righe. \square

Sviluppando i calcoli dei determinanti si può ricondurre la formula anche alla seguente forma:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right] \quad (9.36)$$

Infine, nel caso di coordinate ortogonali ($F = 0$), tale formula si semplifica e si riduce a:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG}} \right) \right] = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right] \quad (9.37)$$

Esempio: sfera. Dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases} \quad (9.38)$$

ricaviamo la base di Gauss:

$$\begin{cases} \vec{g}_\theta = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} = (R \cos \theta \cos \varphi) \vec{i} + (R \cos \theta \sin \varphi) \vec{j} - (R \sin \theta) \vec{k} = R \vec{e}_\theta \\ \vec{g}_\varphi = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi} = (-R \sin \theta \sin \varphi) \vec{i} + (R \sin \theta \cos \varphi) \vec{j} = R \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \vec{N} = \vec{e}_R = \frac{\overrightarrow{OP}}{R} = (\sin \theta \cos \varphi) \vec{i} + (\sin \theta \sin \varphi) \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \end{cases} \quad (9.39)$$

Forme quadratiche:

$$\mathbf{I}(dP, dP) = ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (9.40)$$

$$e: (g_{jk}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \Rightarrow (g^{jk}) = \frac{1}{R^4 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

Invece di calcolare **II** con le formule per i coefficienti (6.7), calcoliamo direttamente le equazioni di Gauss (ossia gli sviluppi delle derivate dei vettori della base sulla base stessa):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = -R \sin \theta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) - R \cos \theta \vec{k} = -R \vec{e}_R \\ \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{g}_\varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 P}{\partial \theta \partial \varphi} = R \cos \theta (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) = R \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial \vec{g}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = -R \sin \theta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \end{array} \right. \quad (9.41)$$

D'altra parte, dalle prime due equazioni della base di Gauss abbiamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_R = \sin \theta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) - \sin \theta \vec{k} \end{array} \right. \quad (9.42)$$

e combinandole linearmente (moltiplicando la prima equazione per $\cos \theta$ e la seconda per $\sin \theta$) otteniamo:

$$\sin \theta \vec{e}_R + \cos \theta \vec{e}_\theta = (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j})$$

e dunque l'ultima equazione di (9.41) diventa:

$$\frac{\partial \vec{g}_\varphi}{\partial \varphi} = \sin \theta \vec{e}_R + \cos \theta \vec{e}_\theta$$

Il sistema (9.41) ci dà le derivate dei vettori della base naturale rispetto alla base ortonormata; ora tuttavia possiamo ricavarci anche le stesse espressioni in funzione della base naturale (non ortonormata), vale a dire le equazioni di Gauss. Infatti dalle equazioni (9.39) sappiamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_\theta = \frac{\vec{g}_\theta}{R} \\ \vec{e}_\varphi = \frac{\vec{g}_\varphi}{R \sin \theta} \\ \vec{e}_R = \vec{N} \end{array} \right. \quad (9.43)$$

e dunque il sistema (9.41) diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \theta} = -R \vec{e}_R \\ \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \varphi} = R \cos \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial \vec{g}_\varphi}{\partial \varphi} = -R \sin \theta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \theta} = 0 \cdot \vec{g}_\theta + 0 \cdot \vec{g}_\varphi - R \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \varphi} = 0 \cdot \vec{g}_\theta + \cotan \theta \vec{g}_\varphi + 0 \cdot \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{g}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta \cos \theta \vec{g}_\theta + 0 \cdot \vec{g}_\varphi - R \sin^2 \theta \vec{N} \end{array} \right. \quad (9.44)$$

Queste sono le equazioni di Gauss: i coefficienti dei termini normali sono i coefficienti della seconda forma. Dunque abbiamo direttamente che

$$\text{II:} \quad e = -R; \quad f = 0; \quad g = -R \sin^2 \theta$$

Da cui ricaviamo immediatamente la curvatura gaussiana:

$$k = \frac{\det \widehat{\mathbf{\Pi}}}{\det \widehat{\mathbf{I}}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg}{EG} = \frac{R^2 \sin^2 \theta}{R^2 R^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{R^2}$$

che possiamo anche vedere come $\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}$, ossia il prodotto delle curvature principali k_{MIN} e k_{MAX} (che logicamente, per la sfera, coincidono).

I simboli di Christoffel li ricaviamo senza alcuno sforzo dal sistema (9.45), sdoppiandolo in due sistemi, uno per ciascuna derivazione (rispetto a θ e rispetto a φ) nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \theta} = 0 \cdot \vec{g}_\theta + 0 \cdot \vec{g}_\varphi - R \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{g}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \cdot \vec{g}_\theta + \cotan \theta \vec{g}_\varphi + 0 \cdot \vec{N} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \varphi} = 0 \cdot \vec{g}_\theta + \cotan \theta \vec{g}_\varphi + 0 \cdot \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{g}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta \cos \theta \vec{g}_\theta + 0 \cdot \vec{g}_\varphi - R \sin^2 \theta \vec{N} \end{array} \right. \quad (9.45)$$

e i Γ sono i coefficienti dei vettori della base di Gauss:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 = 0 & \Gamma_{12}^2 = \cotan \theta \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{21}^1 = 0 & \Gamma_{21}^2 = \cotan \theta \\ \Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{22}^2 = 0 \end{array}$$

Dunque abbiamo che le matrici di connessione sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{21}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{21}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cotan \theta \end{pmatrix} \\ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \cotan \theta & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (9.46)$$

Passiamo al tensore di Riemann. Abbiamo già definito $R_{jk} := (R_{qjk}^p)$, con p indice di riga e q indice di colonna⁷; tale matrice è spesso detta **matrice di curvatura**. Per ogni scelta di j e k ho dunque una matrice R_{jk} . Dal fatto che nella definizione di matrice di connessione abbiamo inteso l'indice contravariante come indice di riga e l'indice covariante come indice di colonna⁸ e dalla (9.4), si deduce che, quando trattiamo matrici di connessione, vale:

$$R_{jk} := \frac{\partial \Gamma_j}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial u^j} + \Gamma_k \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_k$$

dunque derivando le matrici di connessione, per ogni scelta di (j, k) abbiamo una matrice. Nel nostro caso, per antisimmetria: $R_{11} = -R_{11} = 0$ e $R_{22} = -R_{22} = 0$. Inoltre, sempre per antisimmetria, abbiamo che $R_{12} = -R_{21}$, dunque abbiamo essenzialmente una sola matrice di curvatura.

⁷Ora è giunto il momento di rimarcare la fondamentale distinzione di questo R_{jk} da \tilde{R}_{jk} , il quale, mediante la (9.1), era stato definito in funzione delle matrici di Cartan. Con $R_{jk} = (R_{qjk}^p)$ (p indice di riga, q indice di colonna), invece, ci disinteressiamo della parte di Mainardi-Codazzi. In altri termini: $\tilde{R}_{jk} = R_{jk} + A$ dove A è una parte additiva dovuta alle condizioni di Mainardi codazzi. Ribadiamo che \tilde{R}_{jk} è definita matricialmente sugli Ω ; R_{jk} , invece, è definita elemento per elemento sui simboli di Christoffel Γ_{pq}^l .

⁸In particolare, l'inghippo sta nel fatto che, per come abbiamo definito le matrici di connessione Γ_j , il prodotto $\Gamma_{qj}^l \Gamma_{lk}^p$ che compare al secondo membro della (9.4) non è un prodotto righe per colonne, bensì colonne per righe. E, date due matrici qualunque A e B , detta C la matrice prodotto righe per colonne tra A e B , si ha:

$$c_{ij} = \sum_l a_{lj} b_{il} = \sum_l b_{il} a_{lj}$$

che è esattamente il generico elemento della matrice $B \cdot A$, da cui ricaviamo immediatamente che bisogna cambiare i segni agli ultimi due termini dell'equazione.

Calcoliamocela:

$$\begin{aligned}
R_{12} &= \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u^1} + \Gamma_2 \Gamma_1 - \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta} + \Gamma_2 \Gamma_1 - \Gamma_1 \Gamma_2 = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cotan \theta \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \cotan \theta & 0 \end{pmatrix} + \\
+ &\begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \cotan \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cotan \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cotan \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \cotan \theta & 0 \end{pmatrix} = \\
= &\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ -\frac{1}{\sin^2 \theta} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\cos^2 \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cotan^2 \theta & 0 \end{pmatrix} = \\
= &\begin{pmatrix} 0 & -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \\ \frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin^2 \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.47}$$

E dunque il tensore di Riemann ha due componenti nulle. A tale risultato potevamo analogamente arrivare direttamente dall'equazione (9.4). Infatti⁹:

$$\begin{aligned}
R_{112}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial \theta} + \Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^1 - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^1 = 0 \\
R_{212}^1 &= \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial \theta} + \Gamma_{21}^l \Gamma_{l2}^1 - \Gamma_{22}^l \Gamma_{l1}^1 = -(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta = -\sin^2 \theta \\
R_{112}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial \theta} + \Gamma_{11}^l \Gamma_{l2}^2 - \Gamma_{12}^l \Gamma_{l1}^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cotan^2 \theta = 1 \\
R_{212}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial \theta} + \Gamma_{21}^l \Gamma_{l2}^2 - \Gamma_{22}^l \Gamma_{l1}^2 = 0
\end{aligned} \tag{9.48}$$

Passiamo al tensore quadruplo di Riemann in forma covariante R_{mqjk} . Per trovarlo contraiamo il tensore R_{qjk}^p con il tensore metrico g_{mp} precedentemente trovato. La combinazione lineare ci dà:

$$R_{mqjk} := g_{mp} R_{qjk}^p$$

e verifichiamo in qualche caso l'antisimmetria di tale tensore nella prima e nella seconda coppia di indici. Specificatamente, partiamo dalla componente

⁹In questo caso, non trattandosi di matrici di connessione, ricorriamo direttamente alla formula senza i due segni scambiati. Il problema dei segni lo abbiamo solamente quando organizziamo i simboli di Christoffel in matrici, in base al modo in cui scegliamo di organizzarli.

non nulla già trovata R_{12} , vale a dire (R_{q12}^p) , con p indice di colonna e q indice di riga. Abbiamo dunque in generale quattro componenti:

$$R_{1112} = g_{1p}R_{112}^p = g_{11}R_{112}^1 + g_{12}R_{112}^2 = R^2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

fatto coerente con l'antisimmetria nella prima coppia di indici. Inoltre, per la stessa ragione anche:

$$R_{2212} = g_{2p}R_{212}^p = g_{21}R_{212}^1 + g_{22}R_{212}^2 = 0 \cdot (-\sin^2 \theta) + R^2 \sin^2 \theta \cdot 0$$

Infine:

$$R_{1212} = g_{1p}R_{212}^p = g_{11}R_{212}^1 + g_{12}R_{212}^2 = R^2 \cdot (-\sin^2 \theta) + 0 \cdot 0 = -R^2 \sin^2 \theta$$

$$R_{2112} = g_{2p}R_{112}^p = g_{21}R_{112}^1 + g_{22}R_{112}^2 = 0 \cdot 0 + R^2 \sin^2 \theta \cdot 1 = R^2 \sin^2 \theta$$

e abbiamo verificato nuovamente l'antisimmetria nella prima coppia di indici. Solo nella forma covariante del tensore di Riemann riusciamo a osservare chiaramente tutte le simmetrie.

Possiamo ottenere lo stesso risultato matricialmente:

$$R_{mqjk} = g_{mp}R_{qjk}^p \quad (9.49)$$

Questo è un vero e proprio prodotto righe per colonne¹⁰: fisso una riga di g e vario la colonna, contemporaneamente rimane fissata la colonna di R e varia la riga. Dunque la matrice delle componenti covarianti del tensore di Riemann è il prodotto della matrice dei coefficienti della metrica per la matrice di curvatura corrispondente. Dunque:

$$R_{mq12} = G \cdot R_{q12}^p = G \cdot R_{12} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sin^2 \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R^2 \sin^2 \theta \\ R^2 \sin^2 \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (9.50)$$

e da ciò vediamo ancora una volta come le componenti sulla diagonale R_{ttjk} siano nulle e le altre due componenti siano uguali a meno del segno.

Dato che $\det \widehat{\mathbf{II}} = \begin{vmatrix} -R & 0 \\ 0 & -R \sin^2 \theta \end{vmatrix} = R^2 \sin^2 \theta$ abbiamo verificato anche il Theorema Egregium, dato che $\det \widehat{\mathbf{II}}$ è una grandezza intrinseca. Dunque:

$$K = \frac{\det \widehat{\mathbf{II}}}{\det \widehat{\mathbf{I}}} = -\frac{R_{1212}}{\det \widehat{\mathbf{I}}} = \frac{R^2 \sin^2 \theta}{R^4 \sin^2 \theta} = \frac{1}{R^2}$$

e abbiamo ritrovato il valore già calcolato in precedenza.

¹⁰Ecco l'utilità di avere l'indice di riga in posizione controvariante: per avere qui un vero e proprio prodotto righe per colonne. Ciò giustifica le nostre definizioni di Γ_j e R_{jk} . Con le definizioni da noi fornite, riusciamo a scrivere il tensore di Riemann in forma covariante come prodotto di matrici.

Cenno cartografico. Gauss ha anche scoperto che la curvatura K è invariante per isometrie. Ciò è logico: se deformiamo la superficie senza stirlarla, preservando lunghezze e angoli, la prima forma non cambia, e dunque nemmeno il tensore di Riemann, e, in definitiva, nemmeno K . Questa è una risposta a un problema cartografico: possiamo mappare isometricamente una sfera su un piano? È possibile riprodurre il mappamondo su un foglio, conservando angoli e lunghezze? No, non è possibile, poiché $K_{\text{sfera}} = R^{-2}$ mentre $K_{\text{piano}} = 0$: se potessimo mappare isometricamente sfera e piano, avremmo che le due curvature coinciderebbero.

Caso n -dimensionale. Nel caso n -dimensionale, il numero di componenti distinte del tensore di Riemann aumenta. In particolare, osserviamo la conformazione della matrice di curvatura R_{jk} :

$$\begin{array}{cccccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & \dots & R_{3n} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & \dots & R_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & R_{n4} & \dots & R_{nn} \end{array}$$

Le componenti R_{tt} sulla diagonale sono nulle per antisimmetria ($R_{tt} = -R_{tt} = 0$). Le componenti nella matrice triangolare bassa sono, per antisimmetria, l'opposto delle componenti corrispettive sulla triangolare alta ($R_{jk} = -\overline{R_{kj}}$). Dunque il numero di componenti fondamentali del tensore di Riemann è il numero di elementi della matrice triangolare alta, con l'esclusione della diagonale, vale a dire:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \quad (9.51)$$

9.4 Perché “tensore”?

9.4.1 Il problema delle parametrizzazioni

Abbiamo chiamato R “tensore” di Riemann (sia in forma normale R_{qjk}^p , sia in forma covariante combinata con la metrica R_{mqjk}). Il concetto di “tensore” risponde a un problema non banale, rispetto al quale anche la notazione tensoriale che abbiamo introdotto ha una certa utilità: il problema dei cambiamenti di parametrizzazione. In generale, auspicheremmo che le proprietà fondamentali che troviamo non dipendano dalla parametrizzazione scelta.

Che cosa succede se cambiamo parametrizzazione? Proviamo¹¹. Prendiamo una funzione $F^{j'}$, differenziabile, invertibile e con determinante jacobiano positivo, di modo che:

$$u^{j'} = F^{j'}(u^j) \quad \Leftrightarrow \quad u^j = F^j(u^{j'}) \quad (9.52)$$

con $F^j = \text{inv}(F^{j'})$. Simbolicamente:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \boxed{u^{j'} = F^{j'}(u^j)} \searrow & \\ u^j & & u^{j'} \\ & \nwarrow \boxed{u^j = F^j(u^{j'})} \swarrow & \end{array} \quad (9.53)$$

La superficie parametrizzata cambia di conseguenza:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \boxed{P' = P \circ F^{j'}} \searrow & \\ P(u^j) & & P(u^{j'}) \\ & \nwarrow \boxed{P = P' \circ F^j} \swarrow & \end{array} \quad (9.54)$$

A ogni parametrizzazione è associata una base di Gauss; in particolare ad ogni parametro è associato un vettore della base:

$$\vec{g}_j = \frac{\partial P}{\partial u^j} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g}_{j'} = \frac{\partial P}{\partial u^{j'}} \quad (9.55)$$

Che relazione sussiste tra queste due diverse basi? Essendo due basi per lo stesso spazio, necessariamente $\vec{g}_{j'}$ deve essere combinazione lineare dei \vec{g}_j . Chiamiamo $A_{j'}^j$ la matrice di cambiamento di base dalle coordinate originarie alle coordinate primate. Abbiamo che¹²:

$$\vec{g}_{j'} = A_{j'}^j \vec{g}_j \quad (9.56)$$

¹¹Per indicare il cambio di parametrizzazione, invece di usare scritte più eterogenee, mettiamo l'apice all'indice originario.

¹²Riscontro mnemonico nella formula: al secondo membro i due indici j in posizione controvariante e covariante "si elidono", e rimane l'indice j' in posizione covariante, che è proprio l'indice che compare al primo membro.

In sostanza abbiamo che:

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow \boxed{\vec{g}_{j'} = A_{j'}^j \vec{g}_j} \searrow & \\
 \vec{g}_j = \frac{\partial P}{\partial u^j} & & \vec{g}_{j'} = \frac{\partial P}{\partial u^{j'}} \\
 & \nwarrow \boxed{\vec{g}_j = A_j^{j'} \vec{g}_{j'}} \swarrow &
 \end{array} \quad (9.57)$$

dove $\begin{cases} A_{j'}^j = \frac{\partial F^j}{\partial u^{j'}} \\ A_j^{j'} = \frac{\partial F^{j'}}{\partial u^j} \end{cases}$, ovvero la matrice $A_{j'}^j$ è la matrice jacobiana della funzione F^j (che a partire dalle coordinate primate ritorna le coordinate originarie¹³), mentre la matrice $A_j^{j'}$ è la matrice jacobiana della funzione $F^{j'}$ (che a partire dalle coordinate originarie fornisce le coordinate primate). Si noti che vale $A_{j'}^i A_i^{k'} = \delta_{j'}^{k'}$, dove δ indica il delta di Kronecker¹⁴ - in altre parole: il prodotto righe per colonne delle due matrici dà la matrice identità, fatto logico, considerando che trattiamo con una trasformazione e la sua inversa.

Come cambiano i coefficienti della metrica?

$$g_{j'k'} = \vec{g}_{j'} \cdot \vec{g}_{k'} = A_{j'}^j A_{k'}^k \vec{g}_j \cdot \vec{g}_k$$

e dunque abbiamo che:

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow \boxed{g_{j'k'} = A_{j'}^j A_{k'}^k \vec{g}_j \cdot \vec{g}_k} \searrow & \\
 g_{jk} := \vec{g}_j \cdot \vec{g}_k & & g_{j'k'} := \vec{g}_{j'} \cdot \vec{g}_{k'} \\
 & \nwarrow \boxed{g_{jk} = A_j^{j'} A_k^{k'} \vec{g}_{j'} \cdot \vec{g}_{k'}} \swarrow &
 \end{array} \quad (9.58)$$

I coefficienti della metrica cambiano quindi con legge lineare omogenea: la matrice della metrica può dunque essere definita un “tensore”, in base alla definizione storica di tensore:

Definizione 9.1. Si chiama **tensore** un ente a n indici che si trasforma, al cambiare delle coordinate, con legge lineare omogenea.

¹³Cosa che simbolicamente si evince dal fatto che in $A_{j'}^j$, le coordinate primate sono in basso (j') e quelle originarie in alto: mnemonicamente è come passare dalle coordinate primate a quelle originarie. Un discorso analogo vale per $A_j^{j'}$: si passa dalle coordinate originarie (in basso) alle coordinate primate (in alto).

¹⁴ δ_{jh} vale 1 se $j = h$, 0 se $j \neq h$.

Quando parliamo di componenti di un tensore, vogliamo solamente dire che esse si trasformano con legge lineare omogenea. Ciò non è banale: implica che se un tensore è nullo in un sistema di coordinate, sarà nullo anche in qualsiasi altro sistema di coordinate, e viceversa. In particolare, il tensore metrico è un tensore doppio (poiché ha due indici) e covariante (poiché sono entrambi posti in posizione covariante¹⁵)

Andiamo avanti, e vediamo come si trasformano i simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{k'l'}^{j'} = \frac{1}{2} g^{j's'} \left(\frac{\partial g_{s'k'}}{\partial u^{l'}} + \frac{\partial g_{l's'}}{\partial u^{k'}} - \frac{\partial g_{k'l'}}{\partial u^{s'}} \right)$$

e per colpa delle derivate dei coefficienti della metrica, oltre alla parte lineare, si sviluppa anche una parte affine. Si ha che:

$$\Gamma_{k'l'}^{j'} = A_j^{j'} A_{k'}^k A_{l'}^l \Gamma_{kl}^j + \frac{\partial A_l^{j'}}{\partial u^{j'}} A_{k'}^l + \dots$$

La legge di trasformazione

$$\begin{array}{ccc} \nearrow & \boxed{\Gamma_{k'l'}^{j'} = A_j^{j'} A_{k'}^k A_{l'}^l \Gamma_{kl}^j + \frac{\partial A_l^{j'}}{\partial u^{j'}} A_{k'}^l + \dots} & \searrow \\ \Gamma_{kl}^j & & \Gamma_{k'l'}^{j'} \\ \nwarrow & \boxed{\Gamma_{kl}^j = A_{j'}^j A_k^{k'} A_{l'}^{l'} \Gamma_{k'l'}^{j'} + \frac{\partial A_{l'}^{j'}}{\partial u^j} A_k^{l'} + \dots} & \swarrow \end{array} \quad (9.59)$$

non è lineare omogenea: vi è un termine additivo (che viene dalle derivate) che non dipende da Γ ; ecco la ragione per cui i Γ sono detti simboli di Christoffel, e non sono elementi di alcun tensore. Se in uno spazio i simboli di Christoffel sono tutti identicamente nulli, ciò non implica che non possano essere diversi da zero cambiando opportunamente la parametrizzazione. I Γ dipendono, insomma, dal sistema di coordinate.

Passando, infine, ai coefficienti R di Riemann (in forma normale),

$$R_{q'j'k'}^{p'} = \frac{\partial \Gamma_{q'k'}^{p'}}{\partial u^{j'}} - \frac{\partial \Gamma_{q'j'}^{p'}}{\partial u^k} + \Gamma_{q'j'}^s \Gamma_{k's}^{p'} - \Gamma_{q'k'}^s \Gamma_{j's}^{p'}$$

le cose sembrerebbero complicarsi ulteriormente, visto che i simboli di Christoffel (che già non si trasformavano linearmente) vengono a loro volta derivati. In realtà, il fatto notevole è che passando a R_{qjk}^p , tutti i termini additivi

¹⁵Si noti nuovamente, nell'espressione della trasformazione di coordinate del tensore metrico, l'importanza della notazione tensoriale: mnemonicamente gli indici uguali posti in posizioni covariante e controvariante "si elidono" - di qui anche l'importanza di scrivere i parametri u^j in forma controvariante.

si cancellano! Otteniamo così il già noto tensore di curvatura, o tensore di Riemann, che si trasforma con la seguente legge¹⁶:

$$\begin{array}{ccc}
 \nearrow & \boxed{R_{q'j'k'}^{p'} = A_p^{p'} A_q^{q'} A_j^j A_k^k R_{qjk}^p} & \searrow \\
 R_{qjk}^p & & R_{q'j'k'}^{p'} \\
 \swarrow & \boxed{R_{qjk}^p = A_p^{p'} A_q^{q'} A_j^j A_k^k R_{q'j'k'}^{p'}} & \nwarrow
 \end{array} \quad (9.60)$$

Dal momento che il tensore di Riemann si trasforma linearmente, se esso è nullo con una parametrizzazione, sarà nullo anche in tutte le altre. Ha perfettamente senso, allora, dare la seguente definizione:

Definizione 9.2. *Uno spazio si dice piatto se $R_{jk} = 0 \quad \forall j, k$.*

O, più brevemente, si usa anche scrivere $R = 0$, per indicare che tutte le componenti del tensore di Riemann sono nulle.

Cenno: tensore di Ricci. Nelle equazioni del campo gravitazionale della relatività generale, entra in gioco anche una particolare contrazione del tensore di Riemann, il cosiddetto tensore di Ricci, un tensore a due indici definito nel seguente modo:

$$\text{Ric}(g) := R_{mk} = g^{qj} R_{mqjk} \quad (9.61)$$

sottointendendo una sommatoria sugli indici q e j , o anche:

$$\text{Ric}(g) = R_{mk} := R_{mpk}^p \quad (9.62)$$

sottointendendo una sommatoria sull'indice p .

Esempio: \mathbb{R}^2 in coordinate cartesiane e polari. Ripercorrendo il cammino di questo paragrafo, vediamo come si comporta la superficie \mathbb{R}^2 , il piano, rispetto a due diverse parametrizzazioni.

Coordinate cartesiane. Le coordinate sono (x, y) , dunque l'equazione della superficie è $P(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. La base naturale è $\left\{ \begin{array}{l} \vec{g}_x = \vec{i} \\ \vec{g}_y = \vec{j} \end{array} \right.$. La metrica è, naturalmente, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, da cui ricaviamo che il tensore metrico è

¹⁶Non è superfluo far notare nuovamente la potenza della notazione tensoriale: essendo R_{qjk}^p un tensore quadruplo (a quattro indici), scriviamo quattro volte la matrice A , quindi inseriamo gli indici in modo tale che quelli in posti diversi si semplifichino e rimanga solamente l'indice che ci interessa al posto che ci interessa.

costante: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, di più: tale tensore metrico è proprio la matrice identità. Essendo costante il tensore metrico, le derivate dei suoi elementi sono nulle: risultano dunque automaticamente nulli anche tutti i simboli di Christoffel, e dunque anche tutte le componenti del tensore di Riemann R_{qjk}^p . Si badi bene che l'affermare che i Γ nel piano sono nulli non ha alcun significato geometrico, poiché l'annullarsi dei Γ dipende dalla scelta delle coordinate. Viceversa, l'affermare che il piano ha $R = 0$ ha significato geometrico: la curvatura è nulla in qualsiasi sistema di coordinate.

Coordinate polari. Le coordinate sono (ρ, θ) , associamo ρ al primo indice e θ al secondo indice; dunque l'equazione della superficie¹⁷ è $P(\rho, \theta) = \rho \vec{e}_\rho(\theta)$, con $\vec{e}_\rho(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$. E dato che $\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$, la base naturale è $\begin{cases} \vec{g}_\rho = \vec{e}_\rho(\theta) \\ \vec{g}_\theta = \rho \vec{e}_\theta \end{cases}$. Possiamo dedurre la metrica da ragioni geometriche (come diagonale del rettangolo infinitesimale¹⁸ di lati $d\rho$ e $\rho d\theta$), oppure dal prodotto dei vettori della base naturale; ad ogni modo si ha che: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$, da cui ricaviamo che il tensore metrico $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$ non è costante. Abbiamo ora tre metodi per calcolare i simboli di Christoffel.

Primo metodo. Possiamo calcolare i Γ mediante le equazioni di Gauss. Infatti, derivando i vettori della base prima per ρ , poi per θ , otteniamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{g}_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \vec{e}_\rho(\theta)}{\partial \rho} = 0 \cdot \vec{g}_\rho + 0 \cdot \vec{g}_\theta \\ \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \rho} = \frac{\partial \rho \vec{e}_\theta}{\partial \rho} = \vec{e}_\theta = 0 \cdot \vec{g}_\rho + \frac{1}{\rho} \vec{g}_\theta \\ \frac{\partial \vec{g}_\rho}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{e}_\rho(\theta)}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta = 0 \cdot \vec{g}_\rho + \frac{1}{\rho} \vec{g}_\theta \\ \frac{\partial \vec{g}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \rho(-\vec{e}_\rho) = -\rho \cdot \vec{g}_\rho + 0 \cdot \vec{g}_\theta \end{array} \right. \quad (9.63)$$

da cui ricaviamo immediatamente che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\rho\rho}^\rho = 0 \quad \Gamma_{\rho\rho}^\theta = 0 \\ \Gamma_{\theta\rho}^\rho = 0 \quad \Gamma_{\theta\rho}^\theta = \frac{1}{\rho} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\rho\theta}^\rho = 0 \quad \Gamma_{\rho\theta}^\theta = \frac{1}{\rho} \\ \Gamma_{\theta\theta}^\rho = -\rho \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0 \end{array} \right. \quad (9.64)$$

¹⁷Tale superficie, volendo essere precisi, non è esattamente il piano \mathbb{R}^2 , poiché stiamo escludendo il semiasse polare.

¹⁸Possiamo dire questo dal momento che la base associata alle coordinate è una base ortogonale.

Come possiamo notare, tali simboli non sono tutti nulli, sebbene lo fossero in coordinate cartesiane (a conferma del fatto che la legge di trasformazione dei Γ non è lineare).

Secondo metodo. Possiamo calcolare i Γ servendoci del Lemma di Ricci e delle sue conseguenze, vale a dire dell’equazione (9.16). Abbiamo che

$$\Gamma_{jl}^p = \frac{1}{2}g^{pk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} \right)$$

ma $\text{inv}(G) = G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}$, e dunque, ad esempio:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\rho &= \frac{1}{2}g^{\rho s} \left(\frac{\partial g_{\theta s}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta s}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial u^s} \right) = \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\rho} \left(\frac{\partial g_{\theta\rho}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\rho}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{2}g^{\rho\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} \right) = -\rho \quad (9.65) \end{aligned}$$

e analogamente si opera con tutti gli altri simboli. Questo metodo tuttavia, sebbene semplice in linea teorica (abbiamo una formula esplicita), è piuttosto dispendioso quanto a calcoli.

Terzo metodo. Quanto a praticità ed efficienza, conviene invece utilizzare questo terzo metodo, detto metodo di Lagrange o metodo delle equazioni geodetiche. Si costruisce¹⁹ una funzione analoga all’energia cinetica (detta lagrangiana):

$$L(u^j, \dot{u}^j) = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) \quad (9.66)$$

e si costruiscono n equazioni differenziali del second’ordine (in questo caso $n = 2$) nel seguente modo:

$$E_j : \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^j} - \frac{\partial L}{\partial u^j} = 0 \quad (9.67)$$

quindi si riconducono tali equazioni differenziali alla forma normale

$$\ddot{u}^j + \Gamma_{lm}^j \dot{u}^l \dot{u}^m = 0 \quad (9.68)$$

e si osservano i coefficienti della forma quadratica in $\dot{\rho}$ e $\dot{\theta}$. In questo caso abbiamo che:

$$\begin{aligned} E_\rho : & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\dot{\rho})}{dt} - \rho\dot{\theta}^2 = 0 \\ \frac{d(\rho^2\dot{\theta})}{dt} - 0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = 0 \\ \rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (9.69) \end{aligned}$$

¹⁹Vedremo più avanti (paragrafo 11.4.1) da dove deriva questo metodo.

E dunque le due equazioni in forma normale sono:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} + 0 \cdot \dot{\rho}^2 + 0 \cdot \dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\dot{\theta}^2 = 0 \\ \ddot{\theta} + 0 \cdot \dot{\rho}^2 + \frac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\theta} + 0 \cdot \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases} \quad (9.70)$$

Dato che la struttura generale delle equazioni ridotte in forma normale è la seguente:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} + \Gamma_{\rho\rho}^{\rho}\dot{\rho}^2 + 2\Gamma_{\theta\rho}^{\rho}\dot{\rho}\dot{\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^{\rho}\dot{\theta}^2 = 0 \\ \ddot{\theta} + \Gamma_{\rho\rho}^{\theta}\dot{\rho}^2 + 2\Gamma_{\theta\rho}^{\theta}\dot{\rho}\dot{\theta} + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta}\dot{\theta}^2 = 0 \end{cases} \quad (9.71)$$

deduciamo immediatamente che

$$\begin{cases} \Gamma_{\rho\rho}^{\rho} = 0 \\ \Gamma_{\theta\rho}^{\rho} = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\rho} = -\rho \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_{\rho\rho}^{\theta} = 0 \\ \Gamma_{\theta\rho}^{\theta} = \frac{1}{\rho} \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 0 \end{cases} \quad (9.72)$$

Infine, non vi è bisogno di calcolare nuovamente il tensore di Riemann in coordinate polari: dato che era nullo in coordinate cartesiane, e dato che si trasforma linearmente al cambiare delle coordinate, tale tensore sarà identicamente nullo in qualsiasi sistema di coordinate.

9.4.2 A cosa serve il calcolo tensoriale?

Lo scopo del calcolo tensoriale, in definitiva, è quello di riscrivere le equazioni dell'analisi, della geometria e della fisica in maniera indipendente dalla scelta delle coordinate. Facciamo ancora qualche esempio.

Esempio. Tensore di Ricci. Consideriamo l'equazione tensoriale $R_{qjk}^p = 0$: essa vale per qualsiasi scelta di parametrizzazione. Da essa si deduce anche che:

$$\text{Ric}(g) := R_{qk} = R_{qjk}^j = 0$$

Dunque il tensore di Ricci, costruito con le derivate seconde della metrica è anch'esso nullo. Nello spazio-tempo quadridimensionale, affermare che si annulla il tensore di Ricci $\text{Ric}(g) = R_{qk}$ equivale a dire che si annullano tutte le sue componenti, per ogni scelta di $q, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. E dunque, tenendo conto delle simmetrie, tale annullarsi ci fornisce 10 equazioni differenziali, che sono le equazioni di Einstein del campo gravitazionale. Avremo, dunque, 10 potenziali, anziché uno (come nella fisica newtoniana).

Esempio. Equazione di Laplace. Scriviamo nel piano, in coordinate cartesiane, l'equazione di Laplace:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (9.73)$$

Tuttavia questa scrittura dipende dalla scelta di coordinate: in coordinate polari infatti, sostituendo (ρ, θ) in luogo di (x, y) , troviamo che:

$$f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = F(\rho, \theta)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = \rho \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta \right) \end{cases} \quad (9.74)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \theta} = -\rho \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \theta \cos \theta \right) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \rho \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rho \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \rho \cos^2 \theta - \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \right) \end{cases} \quad (9.75)$$

e risolvendo il sistema (9.74) rispetto a $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, e risolvendo il sistema (9.75) rispetto a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, e sostituendo nel laplaciano (9.73) i valori trovati, si ottiene l'equazione di Laplace in coordinate polari:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9.76)$$

Come si vede, tale forma è diversa dall'originale in coordinate cartesiane. Beltrami, nel 1868, ha scoperto la forma tensoriale dell'equazione di Laplace, ovvero la forma indipendente dalla scelta di coordinate. Date infatti coordinate u^j qualsiasi:

$$\Delta f = \frac{1}{\det \hat{\mathbf{I}}} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\det \hat{\mathbf{I}} \cdot g^{jk} \frac{\partial f}{\partial u^k} \right) \quad (9.77)$$

In altre parole, per scrivere il laplaciano indipendentemente dalle coordinate, bisogna conoscere quantomeno la metrica $ds^2 = g_{jk} du^j du^k$ nelle coordinate scelte. Ad esempio, ricalcoliamo il laplaciano in coordinate polari. Abbiamo già trovato che la metrica in coordinate polari è $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$, dunque

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \text{inv}(G) = G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix} \text{ e } \det \hat{\mathbf{I}} = \rho^2.$$

Allora, dall'equazione (9.77), ritroviamo:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 g^{\rho\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho^2 g^{\rho\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho^2 g^{\theta\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho^2 g^{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + 0 + 0 + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho^2 \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (9.78) \end{aligned}$$

Una scrittura come quella della formula (9.77), è essenziale per la fisica, poiché è il nocciolo stesso del principio di relatività.

9.4.3 Interpretazione moderna

Consideriamo i due tensori costituiti dai vettori e dai differenziali delle coordinate:

$$\vec{v} = v^j \vec{g}_j = v^{j'} \vec{g}_{j'}$$

da cui²⁰ $v^{j'} = A_j^{j'} v^j$ e $\vec{g}_{j'} = A_j^j \vec{g}_j$. Si noti che le coordinate cambiano secondo la legge dettata da una certa matrice, mentre i vettori della base cambiano secondo la legge dettata dall'inversa di tale matrice²¹. Prendiamo ora, al posto del vettore \vec{v} , il differenziale di una qualche funzione f . Il procedimento è analogo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^j} du^j = \frac{\partial f}{\partial u^{j'}} du^{j'}$$

da cui $du^{j'} = A_j^{j'} du^j$.

Utilizzando queste leggi di trasformazioni elementari, è possibile interpretare il tensore come una **forma multilineare** sui vettori \vec{v} e sulle forme differenziali df . Consideriamo due forme differenziali df , dg , e un campo vettoriale \vec{v} . Consideriamo la funzione lineare:

$$T : (df, dg; \vec{v}) \rightarrow T(df, dg; \vec{v})$$

Partiamo dal concetto di forma multilineare ed arriviamo alla nozione di tensore come ente rappresentato dalle sue componenti. In particolare possiamo valutare T sugli elementi della base. Definiamo:

$$T_i^{jk} := T(du^j, du^k; \vec{g}_i)$$

²⁰Ed ecco l'importanza di scrivere in posizione controvariante gli indici per le v^j , così come per le u^j .

²¹Ciò è fondamentale e, ripetiamo, manifesta l'importanza della scrittura tensoriale.

le componenti del tensore sulla base considerata. Dalla legge di trasformazione dei differenziali della base segue che:

$$\begin{aligned}
 T_{\nu'}^{j'k'} &= T(du^{j'}, du^{k'}; \vec{g}_{\nu'}) \\
 &= T(A_j^{j'} du^j, A_k^{k'} du^k; A_{\nu'}^l \vec{g}_l) \\
 &= A_j^{j'} A_k^{k'} A_{\nu'}^l T(du^j, du^k; \vec{g}_l) \\
 &= A_j^{j'} A_k^{k'} A_{\nu'}^l T_l^{jk}
 \end{aligned}$$

Concludendo, le componenti delle forme multilineari si trasformano con legge tensoriale. Possiamo dunque concepire i tensori come forme multilineari: il calcolo tensoriale si configura quindi come l'algebra e l'analisi delle funzioni multilineari sullo spazio tangente e sul suo duale.

Parte IV

Parallelismo superficiale e
geodetiche

Capitolo 10

Parallelismo

La teoria del parallelismo superficiale dà un'altra interpretazione del concetto di curvatura di una superficie. Fino ad ora abbiamo definito la curvatura in modo estrinseco, e solo a posteriori abbiamo scoperto che K ha un significato intrinseco. Significato che non abbiamo mai detto esplicitamente quale è: non abbiamo spiegato, insomma, come si può, “vivendo sulla superficie”, capire e comprendere il concetto di curvatura della superficie stessa.

Per capire ciò, ci si pone il problema di dare un criterio che permetta di stabilire quando e se vettori in spazi tangenti a punti distinti siano da considerarsi paralleli¹. Vedremo che, se $K \neq 0$, non sarà possibile definire una nozione univoca di parallelismo.

10.1 Dal caso piano al caso generale

10.1.1 Caso piano

Ripartiamo dal caso piano. Qui abbiamo già a disposizione una nozione di parallelismo: un campo vettoriale è parallelo se ha componenti costanti su un riferimento affine. Da questa definizione facciamo discendere la nozione di **derivata direzionale** di un campo vettoriale \vec{X} lungo il vettore \vec{v} , dove solitamente \vec{v} è il vettore che ci dà direzione di una curva (fig. 10.1). Ad ogni modo in generale:

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{X} = (\nabla_{\vec{v}}X^1)\vec{i} + (\nabla_{\vec{v}}X^2)\vec{j} \quad (10.1)$$

e diciamo che il campo X è parallelo a \vec{v} se $\nabla_{\vec{v}}\vec{X} = 0$, ossia se la derivata direzionale lungo \vec{v} del campo è nulla. Tale definizione è assolutamente intuitiva.

¹Quando si dice che lo spazio euclideo è uno spazio “affine”, si fa appunto riferimento al fatto che esso è caratterizzato dalla nozione di parallelismo e di traslazione di vettori.

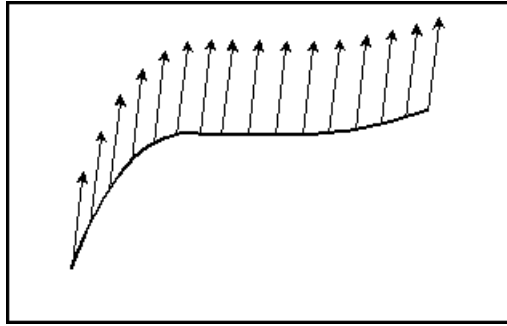


Figura 10.1: Campo vettoriale parallelo nel caso piano

tiva: un campo è parallelo a un vettore se, lungo la direzione di quel vettore il campo non cambia. Dalla nozione di parallelismo che avevamo abbiamo dunque introdotto la nozione di derivata direzionale.

10.1.2 Caso generale: derivata covariante

Per passare al caso generale delle superfici si agisce invece in modo opposto. Si definisce innanzitutto la nozione di **derivata direzionale superficiale** (altrimenti detta **derivata covariante**) e da questa facciamo discendere la nozione di **trasporto per parallelismo**. Il concetto di parallelismo è dunque una conseguenza dell'introduzione della nozione di derivata.

Derivata covariante

Si consideri un campo $\vec{X}(P)$ superficiale, ovvero tangente al supporto S della superficie, pensata immersa nello spazio euclideo. Si consideri inoltre una curva γ passante per P con velocità \vec{v} . Si restringa il campo $\vec{X}(P)$ sulla curva γ , ottenendo:

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(P(t))$$

Tale campo può essere pensato² come immerso in \mathbb{E} , e come tale può essere derivato con la solita regola:

$$\nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}} \vec{X}(t) = \frac{d}{dt} \vec{X}(t) \Big|_{\gamma} = \frac{d}{dt} X^{\alpha}(t) \Big|_{\gamma} \vec{e}_{\alpha} \quad (10.2)$$

Il problema è che la derivata di un campo tangente alla superficie non è in generale un vettore tangente alla superficie.

²Utilizziamo la notazione \mathbb{E} per indicare lo spazio euclideo in generale, disinteressandoci del numero di dimensioni. Il lettore può pensare sempre di riferirsi a \mathbb{E}^3 per fissare le idee. Utilizziamo inoltre la notazione \vec{e}_{α} per riferirci ai vettori della base canonica.

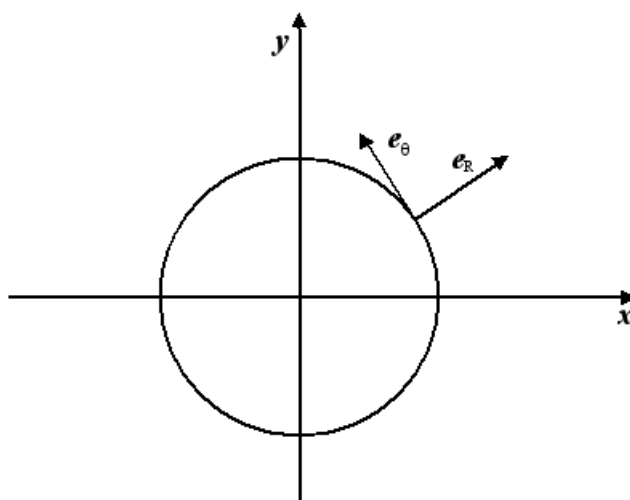


Figura 10.2: Derivata covariante sulla circonferenza

Esempio. Derivata covariante sulla circonferenza. Consideriamo una curva (superficie monodimensionale) pensata immersa nello spazio euclideo bidimensionale. In particolare consideriamo la circonferenza unitaria, di equazione parametrica:

$$P(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

Consideriamo il campo tangente alla curva

$$\vec{e}_\theta = \frac{dP}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

e la sua derivata direzionale lungo il vettore \vec{v} (il vettore velocità della curva):

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{e}_\theta = \frac{d}{dt} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = -\dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = -\dot{\theta} \vec{e}_R(\theta)$$

Ciò che otteniamo è un vettore che non è per nulla tangente alla curva; anzi: è normale ad essa.

Con questo caso estremo abbiamo mostrato che in generale non è vero che la derivata direzionale di un campo superficiale è un vettore tangente alla superficie.

Si conviene allora di chiamare derivata direzionale superficiale la miglior approssimazione della derivata precedente.

Definizione 10.1. Si chiama *derivata direzionale superficiale* (o *derivata covariante*) la proiezione sul piano tangente alla superficie della

derivata direzionale euclidea. In simboli:

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{X}(t) := \prod_{T_P S} \left(\frac{d}{dt}\vec{X}(t) \right)$$

dove $\prod_{T_P S}$ indica appunto la proiezione sul piano tangente.

Questa equazione associa dunque a un campo tangente $\vec{X}(t)$ un altro campo tangente $\nabla_{\vec{v}}\vec{X}(t)$.

Analizziamo il processo di proiezione sul piano tangente e mostriamo che il risultato non dipende dall'immersione, ma che la costruzione è intrinseca e dipende soltanto dalla conoscenza della metrica.

Usiamo la rappresentazione superficiale del campo:

$$\vec{X}(t) = X^\alpha(t)\vec{e}_\alpha = X^j(t)\vec{g}_j$$

Abbiamo scelto, in altre parole, come base la base naturale calcolata nei vari punti della superficie. Dunque, dato che \vec{v} è il vettore velocità, di componenti \dot{u}^k :

$$\nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}}\vec{X} = \frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(X^j\vec{g}_j)$$

Si considerino ora, però, che essendo la base \vec{g}^j mobile sulla superficie, essa dipende dal punto su S e dunque in definitiva dalle coordinate u^i . D'altro canto, se forziamo tale base a rimanere lungo la curva abbiamo che:

$$\vec{g}_j = \vec{g}_j(u^i(t))$$

dove, all'interno della parentesi, è sottointesa una somma sugli i ; e dunque:

$$\vec{X}(t) = X^j(t)\vec{g}_j(u^i(t))$$

Deriviamo dunque $\vec{X}(t)$ con la regola di Leibniz e abbiamo che:

$$\nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}}\vec{X} = \frac{dX(t)}{dt} = \dot{X}^j(t)\vec{g}_j + X^j(t)\frac{d\vec{g}_j}{dt} = \dot{X}^j(t)\vec{g}_j + X^j(t)\frac{\partial\vec{g}_j}{\partial u^k}\dot{u}^k \quad (10.3)$$

Notiamo così che la derivata euclidea³ non ha solo componenti sulla base naturale (la sommatoria al primo addendo), bensì anche un altro termine (il secondo addendo) di cui dobbiamo considerare solo la parte tangente, al fine

³Per rimarcare il fatto che tale derivata è la derivata direzionale euclidea, è stato posto il simbolo \mathbb{E} come apice del simbolo di derivata direzionale ∇ .

di ottenere l'espressione esplicita della derivata covariante. D'altro canto, dalle equazioni di Gauss, sappiamo che

$$\frac{\partial \vec{g}_j}{\partial u^k} = \Gamma_{jk}^l \vec{g}_l + a_{jk} \vec{N}$$

da cui ricaviamo facilmente, con un cambio di indici alla prima sommatoria che⁴:

$$\nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}} \vec{X} = \dot{X}^l \vec{g}_l + X^j \dot{u}^k (\Gamma_{jk}^l \vec{g}_l + a_{jk} \vec{N}) = (\dot{X}^l + \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}^k) \vec{g}_l + (a_{jk} X^j \dot{u}^k) \vec{N} \quad (10.4)$$

In questa forma risulta chiarissima la scissione tra la parte tangente e la parte normale del vettore. La derivata direzionale superficiale (o derivata covariante) si ottiene considerando solamente la parte tangente della derivata euclidea:

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{X} := (\dot{X}^l + \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}^k) \vec{g}_l \quad (10.5)$$

Dunque le due derivate (euclidea e covariante) differiscono per una quantità pari a:

$$\nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}} \vec{X} = \nabla_{\vec{v}} \vec{X} + (a_{jk} X^j \dot{u}^k) \vec{N} \quad (10.6)$$

D'altro canto dalla (10.5) si nota immediatamente che la derivata covariante è una grandezza intrinseca, dal momento che è costruita con le derivate delle componenti \dot{u}^k e con i simboli di Christoffel Γ_{jk}^l .

Inoltre, se ne ricava un altro significato dei simboli di Christoffel (detti anche **coefficienti di connessione**): tra tutti i campi \vec{X} , infatti, abbiamo anche i campi dati da ciascun vettore della base naturale. Così come, tra tutte le direzioni possibili \vec{v} , abbiamo anche le direzioni date dalle linee coordinate rispetto a ciascun parametro (ovvero le direzioni dei vettori della base naturale). Dalla (10.5) segue immediatamente che:

Teorema 10.1.

$$\nabla_{\vec{g}_q} \vec{g}_p = \Gamma_{pq}^l \vec{g}_l$$

Dimostrazione. Infatti⁵ si ha che il campo $\vec{X} = \vec{g}_p$, da cui $\dot{X}^l = 0 \quad \forall l$, poiché la variazione del campo nel tempo è nulla, rispetto alle coordinate della base naturale; inoltre si ha che $\begin{cases} X^j = 1 & \text{se } j = p \\ X^j = 0 & \text{se } j \neq p \end{cases}$ (l'unica coordinata del campo è quella rispetto al vettore \vec{g}_p). D'altro canto, per quanto riguarda la curva lungo cui stiamo derivando, essa è la linea coordinata rispetto al parametro

⁴Trascuriamo, per chiarezza di scrittura di notare esplicitamente le dipendenze dal tempo. Si sottointende sempre $X^j = X^j(t)$ e $\vec{g}_j = \vec{g}_j(u^i(t))$.

⁵Sovente, anziché scrivere si $\nabla_{\vec{g}_q} \vec{g}_p$, si abbrevia con $\nabla_q \vec{g}_p$.

u^q , che percorsa con velocità unitaria ha equazioni: $\begin{cases} u^k(t) = t & \text{se } k = q \\ u^k(t) = \text{cost} & \text{se } k \neq q \end{cases}$.

Abbiamo dunque immediatamente che $\begin{cases} \dot{u}^k = 1 & \text{se } k = q \\ \dot{u}^k = 0 & \text{se } k \neq q \end{cases}$. Ciò forza la sommatoria $\Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}^k$ a collassare ad un solo elemento, quello che ha $X^j = 1$ e $\dot{u}^k = 1$, ossia l'elemento che ha $j = p$ e $k = q$, vale a dire $\Gamma_{pq}^l \cdot 1 \cdot 1 = \Gamma_{pq}^l$, da cui, considerando la (10.5), segue immediatamente la tesi \square

Questo che abbiamo enunciato come un teorema, in realtà potrebbe anche essere scelto per definire i simboli di Christoffel; inoltre, sempre da questa formula, si ricava l'espressione generale della derivata covariante, osservando che la derivata covariante gode di tre proprietà, dette **assiomi di Koszul**.

10.2 Procedimenti di derivazione

10.2.1 Assiomi di Koszul

Proprietà

Le tre proprietà di $\nabla_{\vec{v}} \vec{X}$ notate da Koszul sono le seguenti:

i. additività in \vec{X} e in \vec{v} :

$$\nabla_{\vec{v}}(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) = \nabla_{\vec{v}} \vec{X}_1 + \nabla_{\vec{v}} \vec{X}_2$$

$$\nabla_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} \vec{X} = \nabla_{\vec{v}_1} \vec{X} + \nabla_{\vec{v}_2} \vec{X}$$

Si noti come quest'ultima espressione (principio di sovrapposizione) dia la derivata lungo la diagonale del parallelogramma avente per lati \vec{v}_1 e \vec{v}_2 ;

ii. f-linearità in \vec{v} :

$$\nabla_{f \cdot \vec{v}} \vec{X} = f \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{X}$$

con f una qualsiasi funzione scalare differenziabile;

iii. leibnitzianità in \vec{X} :

$$\nabla_{\vec{v}}(f \cdot \vec{X}) = f \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{X} + (\nabla_{\vec{v}} f) \cdot \vec{X}$$

Verifichiamo brevemente queste tre proprietà, partendo dalla definizione di derivata covariante:

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{X} := (\dot{X}^l + \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}^k) \vec{g}_l = \left(\frac{\partial X^l}{\partial u^k} \dot{u}^k + \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}^k \right) \vec{g}_l$$

e dalla scomposizione sulla base naturale dei vettori:

$$\vec{v} = \dot{u}^k \vec{g}_k$$

$$\vec{X} = X^j \vec{g}_j$$

Dunque abbiamo che:

i.

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}}(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) &= \left(\frac{\partial(X_1^l + X_2^l)}{\partial u^k} \dot{u}^k + \Gamma_{jk}^l (X_1^j + X_2^j) \dot{u}^k \right) \vec{g}_l = \\ &= \left(\frac{\partial X_1^l}{\partial u^k} \dot{u}^k + \Gamma_{jk}^l X_1^j \dot{u}^k \right) \vec{g}_l + \left(\frac{\partial X_2^l}{\partial u^k} \dot{u}^k + \Gamma_{jk}^l X_2^j \dot{u}^k \right) \vec{g}_l = \nabla_{\vec{v}} \vec{X}_1 + \nabla_{\vec{v}} \vec{X}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} \vec{X} &= \left(\frac{\partial X^l}{\partial u^k} (\dot{u}_1^k + \dot{u}_2^k) + \Gamma_{jk}^l X^j (\dot{u}_1^k + \dot{u}_2^k) \right) \vec{g}_l = \\ &= \left(\frac{\partial X^l}{\partial u^k} \dot{u}_1^k + \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}_1^k \right) \vec{g}_l + \left(\frac{\partial X^l}{\partial u^k} \dot{u}_2^k + \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}_2^k \right) \vec{g}_l = \nabla_{\vec{v}_1} \vec{X} + \nabla_{\vec{v}_2} \vec{X} \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \nabla_{f \cdot \vec{v}} \vec{X} &= \nabla_{(f \dot{u}^k) \vec{g}_k} \vec{X} = \left(\frac{\partial X^l}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^l X^j \right) (f \dot{u}^k) \vec{g}_l = \\ &= f \cdot \left(\frac{\partial X^l}{\partial u^k} \dot{u}^k + \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}^k \right) \vec{g}_l = f \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{X} \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}}(f \cdot \vec{X}) &= \nabla_{\vec{v}} X^j \vec{g}_j = \left(\frac{\partial(f \cdot X^l)}{\partial u^k} \dot{u}^k \right) \vec{g}_l + \left(\Gamma_{jk}^l (f X^j) \dot{u}^k \right) \vec{g}_l = \\ &= \left(f \cdot \frac{\partial X^l}{\partial u^k} \dot{u}^k \right) \vec{g}_l + \left(X^l \frac{\partial f}{\partial u^k} \dot{u}^k \right) \vec{g}_l + \left(f \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}^k \right) \vec{g}_l = \\ &= f \cdot \left(\frac{\partial X^l}{\partial u^k} \dot{u}^k + \Gamma_{jk}^l X^j \dot{u}^k \right) \vec{g}_l + \left(\frac{\partial f}{\partial u^k} \dot{u}^k \right) (X^l \vec{g}_l) = f \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{X} + (\nabla_{\vec{v}} f) \vec{X} \end{aligned}$$

Ricostruzione

Tuttavia si può anche scegliere di partire dagli assiomi di Koszul che, appunto, possono essere considerati come veri e propri assiomi. Servendoci solo di questi ultimi, infatti, riusciamo a ricostruire completamente la definizione di derivata covariante; dunque si può indifferentemente definire $\nabla_{\vec{v}} \vec{X}$ per via

assiomatica o mediante la (10.5). Tuttavia se la si definisce per via assiomatica, si abbia cura di definire anche i simboli di Christoffel mediante quello che noi abbiamo enunciato come Teorema 10.1.

Vediamo come si ricostruisce la definizione:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{v}}\vec{X} &= \nabla_{\dot{u}^k\vec{g}_k}\vec{X} = \dot{u}^k\nabla_{\vec{g}_k}\vec{X} = \dot{u}^k\nabla_{\vec{g}_k}X^j\vec{g}_j = \\ &= \dot{u}^k(X^j\nabla_{\vec{g}_k}\vec{g}_j + \vec{g}_j\nabla_{\vec{g}_k}X^j) = \dot{u}^k(X^j\Gamma_{jk}^l\vec{g}_l + \vec{g}_j\frac{\partial X^l}{\partial u^k}\vec{g}_l) = \\ &= (\vec{g}_j\frac{\partial X^l}{\partial u^k}\dot{u}^k + \Gamma_{jk}^lX^j\dot{u}^k)\vec{g}_l\end{aligned}$$

e ci siamo. Si noti che la prima uguaglianza vale per la scomposizione del vettore velocità, la seconda uguaglianza vale per l'assioma di f-linearità in \vec{v} e per la linearità in \vec{v} , la terza uguaglianza vale per la scomposizione del campo \vec{X} rispetto alla base naturale, la quarta uguaglianza vale per la leibnitzianità in \vec{X} , la quinta uguaglianza è vera dal momento che la derivata lungo la direzione \vec{g}_k di una componente scalare X^j è la sua derivata parziale (si presti attenzione al cambio di indici $j \rightarrow l$), infine l'ultima uguaglianza è vera per la definizione dei coefficienti di connessione.

10.2.2 Derivazione covariante alla Koszul

Definizione 10.2. Si chiama *derivazione covariante alla Koszul* (altrimenti detta *connessione lineare*) su una varietà un'operazione di composizione sui campi vettoriali che a due campi ne associa un terzo e che gode delle proprietà descritte dagli assiomi di Koszul.

Si ha:

$$(\vec{v}, \vec{X}) \rightarrow \vec{Z} = \nabla_{\vec{v}}\vec{X}$$

o più in generale:

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow \vec{Z} = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y}$$

Dunque sono gli assiomi che definiscono l'operazione di derivazione; inoltre tale operazione è definita, in un qualsiasi sistema di coordinate, dai coefficienti di connessione, ossia dai coefficienti dello sviluppo di $\nabla_{\vec{g}_k}\vec{g}_j$ sulla base $\{\vec{g}_i\}$. Si ha che:

$$\nabla_{\vec{g}_k}\vec{g}_j = L_{jk}^l\vec{g}_l \quad (10.7)$$

Si badi che in generale i coefficienti di connessione non sono necessariamente i simboli di Christoffel: fissato un sistema di coordinate, dare una derivazione covariante significa dare le n^3 funzioni L_{jk}^l che descrivono il comportamento dei vettori della base naturale associata alle coordinate.

10.2.3 Derivazione covariante alla Levi-Civita

La **derivazione covariante alla Levi-Civita** (o connessione di Levi-Civita) è un caso particolare di derivazione alla Koszul, precisamente il caso in cui i coefficienti di connessione L_{jk}^l siano proprio i simboli di Christoffel di una metrica:

$$L_{jk}^l = \Gamma_{jk}^l \quad (10.8)$$

Tra tutti i modi di derivare i campi vettoriali tangenti, ve n'è uno solo che ha torsione nulla e conserva la metrica. Definiamo infatti la torsione T di due campi \vec{X}, \vec{Y} come

$$T(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - [\vec{X}, \vec{Y}] \quad (10.9)$$

dove $[\vec{X}, \vec{Y}]$ è il commutatore⁶: $[\vec{X}, \vec{Y}] = \vec{X}\vec{Y} - \vec{Y}\vec{X}$. Una connessione di Levi-Civita è dunque una connessione che, oltre ai tre assiomi di Koszul, verifica anche le seguenti proprietà:

iv. torsione nulla:

$$T(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - [\vec{X}, \vec{Y}]$$

$$\nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} = [\vec{X}, \vec{Y}]$$

v. compatibilità con la metrica (conserva angoli e prodotti scalari):

$$\vec{X}(\vec{Y} \cdot \vec{Z}) = (\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}) \cdot \vec{Z} + \vec{Y} \cdot (\nabla_{\vec{X}}\vec{Z})$$

L'unicità di tale connessione ci è garantita dal seguente teorema (che non dimostriamo):

Teorema fondamentale della geometria riemanniana. *In una varietà riemanniana vi è un'unica connessione che ha torsione nulla ed è compatibile con la metrica.*

Tale connessione è proprio la connessione di Levi-Civita (talvolta detta anche connessione di Riemann), che dalla proprietà (v.) acquisisce il nome anche di "connessione metrica". Dato che i coefficienti di connessione coincidono con i simboli di Christoffel, la derivata covariante alla Levi-Civita è dunque proprio la parte tangente della derivata euclidea ed è dunque la derivata che abbiamo trovato e analizzato nei paragrafi precedenti, e sarà anche la derivata che utilizzeremo.

⁶Talvolta anche detto **parentesi di Lie**. Si noti che $\vec{X}\vec{Y}$ e $\vec{Y}\vec{X}$ non sono in generale campi vettoriali tangenti; tuttavia si può dimostrare che $[\vec{X}, \vec{Y}]$ è un campo vettoriale tangente.

10.3 Parallelismo

10.3.1 Definizione

Torniamo al problema di definire un criterio di parallelismo per un campo vettoriale. Avendo a disposizione, ora, la nozione di derivata covariante possiamo anzitutto definire la nozione di parallelismo per un campo definito lungo una linea.

Diamo dunque la seguente definizione:

Definizione 10.3. Diciamo che \vec{X} è un campo vettoriale parallelo lungo una curva γ se

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{X} = 0$$

dove \vec{v} indica la velocità della curva.

Ricorrendo alla definizione di derivata covariante, troviamo che la condizione di parallelismo è espressa da un sistema differenziale:

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{X} = 0 \Leftrightarrow \dot{X}^l(t) + \Gamma_{jk}^l X^j(t) \dot{u}^k = 0 \quad \forall l \quad (10.10)$$

Dunque, data una base e date le componenti $X^j(t)$ del campo lungo tale base, riusciamo a ricavare i coefficienti di Christoffel, e dunque a studiare l'equazione (10.10). Segue immediatamente dunque la nozione di trasporto per parallelismo.

10.3.2 Trasporto per parallelismo

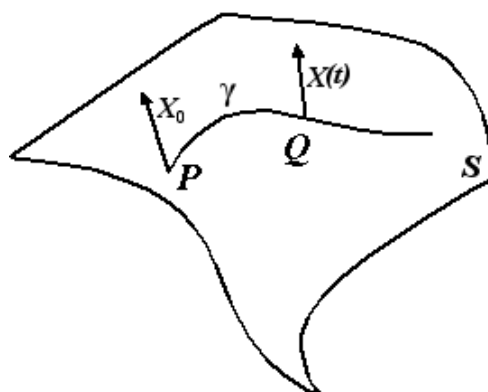


Figura 10.3: Il problema del trasporto per parallelismo

Consideriamo su una superficie S due punti P, Q e una curva regolare γ che li unisce (fig. 10.3). Sia \vec{X}_0 un vettore applicato in P . Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{X}^l + (\dot{u}^k \Gamma_{jk}^l) X^j = 0 \\ X^l(0) = X_0^l \end{cases} \quad (10.11)$$

dove la seconda equazione rappresenta il dato iniziale (è semplicemente la scrittura per componenti dell'identità $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$). Poiché tale sistema è un sistema lineare di equazioni differenziali con coefficienti non singolari (continui per $t \in [0, 1]$, con 1 il valore⁷ del parametro t in Q), tale problema ammette, per il teorema di esistenza globale delle soluzioni, una e una sola soluzione globale definita per tutti i tempi.

Possiamo dunque affermare l'esistenza e unicità della soluzione:

$$X^l(t) \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

Definizione 10.4. Il vettore $\vec{X}_1 \in T_Q S$ definito dalle funzioni $X^l(1)$ è detto il **vettore trasportato per parallelismo** di \vec{X}_0 da P a Q lungo la curva γ , avente $\vec{v} = \dot{u}^k \vec{g}_k$.

Il trasporto per parallelismo è metrico, vale a dire conserva il prodotto scalare e la norma dei vettori trasportati per parallelismo (in forma equivalente, si può dire che per il prodotto scalare vale la regola di Leibniz della derivazione). La definizione, tuttavia, di vettore trasportato per parallelismo dipende fortemente dalla curva γ , ossia dal cammino che abbiamo seguito per trasportare il vettore. Possiamo liberarci di tale dipendenza?

Esempio: sfera e derivate covarianti. *Primo punto.* Su S^2 si consideri un arco γ di parallelo, e i campi $\vec{X} = \vec{e}_\varphi$ e $\vec{Y} = \vec{e}_\theta$. Le equazioni di γ si ottengono dalle equazioni della sfera, fissando la colatitudine $\theta = \theta_0$. Dunque si ha (parametrizzando con $\varphi = t$):

$$\gamma : P(\varphi) = \begin{cases} x = R \sin \theta_0 \cos \varphi \\ y = R \sin \theta_0 \sin \varphi \\ z = R \cos \theta_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = -R \sin \theta_0 \sin \varphi \\ \dot{y} = R \sin \theta_0 \cos \varphi \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

⁷Ciò non è restrittivo: si può sempre riparametrizzare la curva facendo in modo che il parametro t sia nullo in P e unitario in Q .

dove il punto designa la derivata rispetto al parametro φ (che svolge qui la stessa funzione del parametro t). D'altro canto, considerando che

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \vec{g}_\theta = R \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + R \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - R \sin \theta \vec{k} \\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \vec{g}_\varphi = -R \sin \theta \sin \varphi \vec{i} + R \sin \theta \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\theta = \text{vers}(\vec{g}_\theta) = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = \text{vers}(\vec{g}_\varphi) = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{N} = \text{vers}(\vec{g}_\theta \wedge \vec{g}_\varphi) = \text{vers} \left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \right) = \\ = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \end{cases}$$

e dunque abbiamo subito che $\vec{v} = R \sin \theta_0 \vec{e}_\varphi$. Ci chiediamo: quanto vale la derivata covariante dei campi \vec{X} e \vec{Y} lungo γ ? Il trucco è ricondursi, attraverso le proprietà della derivata covariante (linearità in \vec{X} e \vec{v} , f-linearità in \vec{v} , leibnizianità in \vec{X}), a calcolare una derivata covariante avente come argomenti vettori della base naturale. A quel punto, grazie al Teorema 10.1, abbiamo a disposizione uno strumento a noi noto: i simboli di Christoffel (che abbiamo già calcolato, per la sfera, nel paragrafo 9.3.1).

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}} \vec{X} &= \nabla_{R \sin \theta_0 \vec{e}_\varphi} \vec{e}_\varphi = \nabla_{\vec{g}_\varphi} \left(\frac{\vec{g}_\varphi}{R \sin \theta_0} \right) = \frac{1}{R \sin \theta_0} \nabla_{\vec{g}_\varphi} \vec{g}_\varphi = \frac{1}{R \sin \theta_0} (\Gamma_{\varphi\varphi}^l \vec{g}_l) = \\ &= \frac{1}{R \sin \theta_0} (\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta \vec{g}_\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \vec{g}_\varphi) = \frac{1}{R \sin \theta_0} (-\sin \theta_0 \cos \theta_0 \vec{g}_\theta + 0 \cdot \vec{g}_\varphi) = -\frac{\cos \theta_0}{R} \vec{g}_\theta \end{aligned}$$

Verifichiamo tale risultato con l'immersione euclidea: proviamo a calcolare la derivata direzionale euclidea di \vec{X} lungo γ , e valutiamo se effettivamente la parte tangente di tale derivata è la derivata covariante precedentemente trovata. Ricordandoci nuovamente che φ svolge qui la funzione del parametro t , abbiamo che:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}} \vec{X} &= \nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}} \vec{e}_\varphi = \nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}} (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) = \\ &= \frac{d}{d\varphi} (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) = -\cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j} \end{aligned}$$

Sotto in questa forma, non sapremmo distinguere la parte tangente da quella normale. D'altro canto è anche vero che possiamo sviluppare la derivata sul piano tangente, con $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{N})$ base ortonormata:

$$\nabla_{\vec{v}}^{\mathbb{E}} \vec{X} = \frac{d\vec{X}}{d\varphi} = \left(\vec{e}_\theta \cdot \frac{d\vec{X}}{d\varphi} \right) \vec{e}_\theta + \left(\vec{e}_\varphi \cdot \frac{d\vec{X}}{d\varphi} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\vec{N} \cdot \frac{d\vec{X}}{d\varphi} \right) \vec{N}$$

dove nelle parentesi vi sono le coordinate rispetto alla base ortonormata. Si nota immediatamente che la parte normale è l'ultimo termine. E quindi la derivata covariante deve limitarsi alla somma dei primi due termini, ovvero:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{v}}\vec{X} &= \left(\vec{e}_\theta \frac{d\vec{X}}{d\varphi}\right)\vec{e}_\theta + \left(\vec{e}_\varphi \frac{d\vec{X}}{d\varphi}\right)\vec{e}_\varphi = \\ &= (\cos\theta_0 \cos\varphi\vec{i} + \cos\theta_0 \sin\varphi\vec{j} - \sin\theta_0\vec{k})(-\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j})\vec{e}_\theta + \\ &\quad + (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})(-\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j})\vec{e}_\varphi = \\ &= -\cos\theta_0\vec{e}_\theta = -\frac{\cos\theta_0}{R}\vec{g}_\theta\end{aligned}$$

e ci siamo.

Calcoliamo ora la derivata covariante del campo \vec{Y} (i simboli di Christoffel per la sfera li abbiamo già calcolati al paragrafo 9.3.1):

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{v}}\vec{Y} &= \nabla_{R\sin\theta_0\vec{e}_\theta}\vec{e}_\theta = \nabla_{\vec{g}_\varphi}\left(\frac{\vec{g}_\theta}{R}\right) = \frac{1}{R}\nabla_{\vec{g}_\varphi}\vec{g}_\theta = \frac{1}{R}(\Gamma_{\theta\varphi}^l\vec{g}_l) = \\ &= \frac{1}{R}(\Gamma_{\theta\varphi}^\theta\vec{g}_\theta + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi\vec{g}_\varphi) = \frac{1}{R}(0\cdot\vec{g}_\theta + \cotan\theta_0\vec{g}_\varphi) = \frac{\cotan\theta_0}{R}\vec{g}_\varphi\end{aligned}$$

Secondo punto. Si consideri un arco α di meridiano e il campo $\vec{Z} = \vec{e}_\theta$. Calcoliamo la derivata covariante di \vec{Z} lungo α .

Essendo \vec{e}_θ un versore, la sua derivata sarà perpendicolare al versore stesso. D'altro canto non è difficile vedere che tale derivata è perpendicolare alla superficie della sfera, poiché è diretta sempre come la normale \vec{N} . La derivazione euclidea ci dà un vettore completamente normale alla superficie: allora la derivata covariante deve necessariamente essere nulla (visto che le componenti tangenti della derivata euclidea sono nulle). Dunque:

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{e}_\theta = 0$$

Notiamo inoltre che la velocità \vec{v} sul meridiano è diretta come il versore \vec{e}_θ , da cui:

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{e}_\theta = \nabla_{\lambda\vec{e}_\theta}\vec{e}_\theta = \lambda\nabla_{\vec{e}_\theta}\vec{e}_\theta = 0$$

Ma allora

$$\nabla_{\vec{e}_\theta}\vec{e}_\theta = 0$$

o, in alternativa, visto che \vec{e}_θ è il versore tangente al meridiano:

$$\nabla_{\vec{t}}\vec{t} = 0$$

Questa equazione è nota sotto il nome di **equazione geodetica**: vedremo meglio più avanti il suo significato.

10.4 Dipendenza del trasporto dalla curva

La derivazione covariante ci permette di trasportare un vettore lungo una curva. Proviamo a trasportare lo stesso vettore lungo due linee diverse, tenendo fissi i punti di partenza e di arrivo.

Consideriamo un vettore \vec{X}_0 in P_0 e due curve γ_1 e γ_2 entrambe passanti sia per P_0 sia per P_1 . Trasportando per parallelismo P_0 lungo γ_1 o γ_2 , otteniamo il medesimo vettore finale?

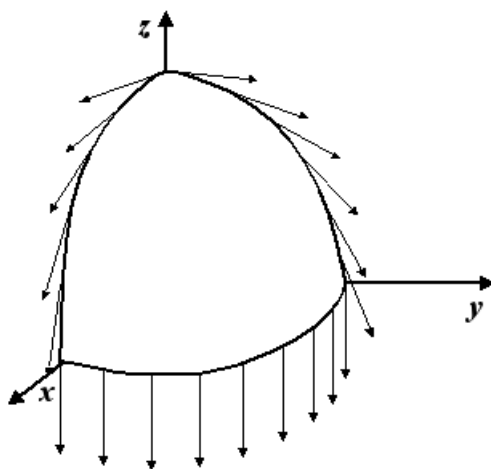


Figura 10.4: Trasporto per parallelismo lungo un triangolo geodetico di S^2

Esempio: triangolo geodetico su S^2 . Consideriamo su una sfera tre archi di cerchi massimi ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) uniti a formare un circuito chiuso; tale figura è detta “triangolo geodetico” (si capirà meglio più avanti il perché). I vettori tangenti a ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) sono vettori superficiali (ossia giacenti nel piano tangente alla sfera). Cosa succede se trasportiamo un vettore lungo il cammino chiuso formato da ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$)? Il risultato, anche intuitivamente, è che a ogni circuito chiuso corrisponde una rotazione del vettore (fig. 10.4): quando ritorna al punto iniziale non coincide più con il vettore originario, ma risulta ruotato di un certo angolo α . Tale angolo dipende, naturalmente, dalla scelta degli archi di cerchi massimi: maggiore è l’area tra tali archi, maggiore sarà l’angolo di cui il vettore risulta ruotato. In particolare, se consideriamo lo specchio di sfera nel primo ottante, abbiamo che la rotazione è di $\pi/2$; due giri daranno una rotazione di π , n giri una rotazione di $n\pi/2$.

Il trasporto lungo una curva chiusa, dunque, non è un’identità: questo caso mostra come il trasporto dipenda fortemente dalla curva scelta. Mostra inoltre che ad ogni “laccio” (chiamiamo così i circuiti chiusi) è associata una

rotazione e che alla composizione dei “lacci” corrisponde il prodotto di rotazioni. Infine, mostra che l’angolo di rotazione dipende dall’area racchiusa dal “laccio”.

10.4.1 Condizione di teleparallelismo

Abbiamo visto che il trasporto in generale dipende fortemente dalla curva scelta. Sotto che condizioni, ci chiediamo, il trasporto non dipende dal cammino γ ? Iniziamo con il dimostrare un importante risultato:

Lemma 10.2 (Formula di Ricci). *Dato un campo vettoriale \vec{X} si ha che:*

$$(\nabla_{\vec{g}_i} \nabla_{\vec{g}_j} - \nabla_{\vec{g}_j} \nabla_{\vec{g}_i})X^h = R_{kij}^h X^k$$

Dimostrazione. Calcoliamo due volte la derivata covariante rispetto a due vettori della base naturale. Notiamo che:

$$\nabla_{\vec{g}_i} X^h = \frac{\partial X^h}{\partial u^p} \dot{u}^p + \Gamma_{kp}^h X^k \dot{u}^p = \frac{\partial X^h}{\partial u^p} \delta_{ip} + \Gamma_{kp}^h X^k \delta_{ip} = \frac{\partial X^h}{\partial u^i} + \Gamma_{ki}^h X^k$$

dal momento che la velocità ha componenti solo lungo \vec{g}_i ; e dunque:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{g}_i} \nabla_{\vec{g}_j} X^h &= \frac{\partial \nabla_{\vec{g}_j} X^h}{\partial u^i} + \Gamma_{ik}^h \nabla_{\vec{g}_j} X^k = \\ &= \frac{\partial^2 X^h}{\partial u^i \partial u^j} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^h X^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ik}^h \left(\frac{\partial X^k}{\partial u^j} + \Gamma_{jr}^k X^r \right) = \\ &= \frac{\partial^2 X^h}{\partial u^i \partial u^j} + X^h \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial u^i} + \Gamma_{jk}^h \frac{\partial X^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ik}^h \frac{\partial X^k}{\partial u^j} + \Gamma_{ir}^h \Gamma_{jk}^r X^k \end{aligned}$$

e scambiando gli indici i e j :

$$\nabla_{\vec{g}_j} \nabla_{\vec{g}_i} X^h = \frac{\partial^2 X^h}{\partial u^j \partial u^i} + X^h \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^j} + \Gamma_{ik}^h \frac{\partial X^k}{\partial u^j} + \Gamma_{jk}^h \frac{\partial X^k}{\partial u^i} + \Gamma_{jr}^h \Gamma_{ik}^r X^k$$

Nella differenza membro a membro tra le due eguaglianze, per l’uguaglianza delle derivate seconde miste (teorema di Schwarz) e per la simmetria dei simboli di Christoffel negli indici covarianti, diversi termini al secondo membro si elidono e rimane:

$$\nabla_{\vec{g}_i} \nabla_{\vec{g}_j} X^h - \nabla_{\vec{g}_j} \nabla_{\vec{g}_i} X^h = \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^j} + \Gamma_{ir}^h \Gamma_{jk}^r - \Gamma_{jr}^h \Gamma_{ik}^r \right) X^k$$

e ricordandosi della definizione di R_{kij}^h , si ha:

$$(\nabla_{\vec{g}_i} \nabla_{\vec{g}_j} - \nabla_{\vec{g}_j} \nabla_{\vec{g}_i})X^h = R_{kij}^h X^k \quad (10.12)$$

cioè la tesi. \square

Teorema 10.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il trasporto sia indipendente dalla curva è che:*

$$R_{kij}^h = 0$$

Corollario 10.4. *Per $n = 2$ (spazio euclideo tridimensionale) condizione necessaria e sufficiente affinché il trasporto sia indipendente dalla curva è che:*

$$K = 0$$

Dimostrazione. Se il trasporto non dipende dalla curva, ogni vettore \vec{X}_0 in P_0 definisce in un aperto stellato centrato in P_0 un campo vettoriale che verifica la condizione dell'indipendenza del trasporto dalla curva scelta. Chiamiamo $X^j(u^1, \dots, u^n)$ le componenti di questo campo. Per costruzione il campo è parallelo lungo ogni linea nell'aperto. Dunque, comunque scelto il vettore \vec{v} , deve essere:

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{X} = 0$$

o, in componenti:

$$v^k \left(\frac{\partial X^j}{\partial u^k} + \Gamma_{jk}^l X^j \right) = 0$$

Ma per l'arbitrarietà di \vec{v} , deve essere:

$$\frac{\partial X^j}{\partial u^k} = -\Gamma_{jk}^l X^j \quad (10.13)$$

Tale condizione è detta **condizione di teleparallelismo** (vale a dire: di parallelismo a distanza). Le funzioni $X^j(u^1, \dots, u^n)$ devono necessariamente essere soluzioni di questo sistema di equazioni alle derivate parziali, chiamato **sistema ai differenziali totali**. Esso equivale alla richiesta che le forme differenziali

$$dX^j = -\Gamma_{jk}^l X^j du^k$$

siano integrabili, cioè differenziali esatti. L'integrabilità dipende da condizioni necessarie per le X^j , in particolare dall'uguaglianza delle derivate seconde miste (Teorema di Schwarz). Se tali condizioni sono indipendenti dal campo \vec{X} scelto, allora esse sono naturalmente anche sufficienti e il sistema si dice **illimitatamente integrabile**.

L'imporre l'uguaglianza delle derivate miste equivale a imporre la commutabilità delle seguenti derivate covarianti:

$$\nabla_{\vec{g}_i} \nabla_{\vec{g}_j} \vec{X} = \nabla_{\vec{g}_j} \nabla_{\vec{g}_i} \vec{X}$$

o anche, per componenti:

$$\nabla_{\vec{g}_i} \nabla_{\vec{g}_j} X^h - \nabla_{\vec{g}_j} \nabla_{\vec{g}_i} X^h = 0$$

Ma allora dal Lemma 10.2 (Formula di Ricci) si ha che $R_{kij}^h X^k = 0$, e per la generalità di \vec{X} , in definitiva:

$$R_{kij}^h = 0$$

e dunque la condizione necessaria è dimostrata.

D'altra parte se il tensore di Riemann è nullo, l'annullarsi identico di R_{kij}^h è indipendente dal campo scelto: il sistema (10.13) è illimitatamente integrabile e dunque si ha la condizione sufficiente della tesi.

Il corollario segue direttamente dal Lemma 9.2 e dal Theorema Egregium. \square

Abbiamo dunque dato al tensore di Riemann un significato nuovo: esso misura la dipendenza del trasporto per parallelismo dalla curva scelta.

Capitolo 11

Geodetiche

11.1 Definizioni e esempi

Il concetto di **geodetica** nasce come naturale estensione del concetto di retta nel piano. Le geodetiche sono le curve principali su una varietà riemanniana munita della prima forma fondamentale (vale a dire: del prodotto scalare), una varietà che possiamo denotare (S, g) ove g indica la metrica.

Esempio: spazio-tempo di Einstein. Sia S lo spazio-tempo einsteiniano (varietà riemanniana quadridimensionale munita di una metrica¹). Si può ad esempio parlare di spazio-tempo associato al Sole: quale è il movimento di un generico pianeta nello spazio-tempo S munito della metrica g definita dal Sole? Si ha che tale movimento avviene lungo le geodetiche di (S, g) . In breve: il sole genera un campo che fornisce una metrica ds^2 , la quale a sua volta determina delle geodetiche che forzano il moto del generico pianeta.

Esistono tre possibili definizioni di geodetica, in sostanza tutte e tre (quasi) equivalenti. Tutte e tre sono naturali estensioni del concetto di segmento nel piano: in \mathbb{E}^2 , infatti, le geodetiche sono segmenti di retta, che hanno le seguenti tre proprietà (o caratterizzazioni):

- i. sono le curve di *minima lunghezza* che congiungono due punti (caratterizzazione variazionale²);
- ii. sono le curve con *curvatura nulla* (caratterizzazione geometrica)

¹Tale metrica, determinata dalla distribuzione di materia e energia, fissa la prima forma fondamentale della geometria intrinseca della varietà S , pur non essendo tale metrica definita positiva.

²Tale caratterizzazione delle geodetiche è detta “variazionale” poiché si basa su un principio di “minimo”.

- iii. sono le traiettorie delle particelle libere che si muovono con *accelerazione nulla* (caratterizzazione meccanica³).

Vediamo ora di estendere queste tre caratterizzazioni dal caso piano al caso generale, al fine di definire coerentemente il concetto di “geodetica”.

11.2 Geodetiche come moti inerziali

Iniziamo dall'estensione di [iii].

Definizione 11.1. *Chiamiamo geodetiche le traiettorie di moti inerziali.*

Come naturale estensione del caso piano, possiamo concepire le geodetiche quali traiettorie di moti inerziali, moti cioè percorsi a velocità costante (diventa dunque importante la parametrizzazione delle curve). Al fine di chiarire meglio i concetti su cui stiamo operando, diamo anche la seguente definizione:

Definizione 11.2. *Diciamo che una particella si muove di moto inerziale su una superficie immersa in \mathbb{E}^{n+1} (in particolare in \mathbb{E}^3), se la sua accelerazione tangenziale è nulla.*

Ciò significa che un osservatore “vivente” sulla superficie vede la particella muoversi con accelerazione nulla (dal momento che egli può osservare unicamente l'accelerazione tangenziale): equivalentemente si può affermare che non vi siano forze tangenti alla superficie (assenza di forze che lavorino sulla superficie).

Procuriamoci, in base a questa caratterizzazione, l'equazione delle geodetiche. Partiamo dall'accelerazione nello spazio euclideo e imponiamo l'annullarsi della parte tangente. Si ha che:

$$\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial u^j} \dot{u}^j \quad (11.1)$$

e dunque l'accelerazione di una particella che si muove su una superficie n -dimensionale immersa in uno spazio $n + 1$ -dimensionale è:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial u^j} \dot{u}^j \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial u^j} \right) + \frac{\partial P}{\partial u^j} \frac{d \dot{u}^j}{dt} = \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial u^j \partial u^k} \dot{u}^j \dot{u}^k + \frac{\partial P}{\partial u^j} \ddot{u}^j = \frac{\partial \vec{g}_k}{\partial u^j} \dot{u}^j \dot{u}^k + \frac{\partial P}{\partial u^j} \ddot{u}^j = \\ &= \Gamma_{jk}^l \dot{u}^j \dot{u}^k \vec{g}_l + a_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \vec{N} + \dot{u}^l \frac{\partial P}{\partial u^l} = (\ddot{u}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{u}^j \dot{u}^k) \vec{g}_l + a_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \vec{N} \quad (11.2) \end{aligned}$$

³In sostanza, traduce il principio di inerzia.

Imporre l'annullarsi della parte tangente significa imporre:

$$\ddot{u}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{u}^j \dot{u}^k = 0 \quad (11.3)$$

che, al variare di l , sono n equazioni differenziali del second'ordine, le equazioni di Newton proiettate sul piano tangente alla superficie.

11.2.1 Conseguenze

Nel caso del piano ($n = 2$), in coordinate cartesiane, si ha che $\Gamma = 0$, e le equazioni (11.3) diventano:

$$\ddot{u}^l = 0 \quad (11.4)$$

ovvero: il moto è lineare nel tempo, e si ha dunque un moto rettilineo uniforme.

Inoltre, ritornando al caso generale, si vede immediatamente che la nozione di geodetica è una nozione intrinseca (l'equazione è costruita con i simboli di Christoffel): ciò significa che se “flettiamo” (*bending*) la superficie mantenendo invariate le distanze, le geodetiche non cambiano.

Dimostriamo poi questa importante proprietà:

Teorema 11.1. *Nel moto geodetico, la velocità ha modulo costante:*

$$\|\vec{v}\| = \text{cost}$$

Corollario 11.2. *Il parametro t che parametrizza il moto geodetico è legato all'arco dalla relazione:*

$$s = At + B$$

Il corollario discende banalmente dal teorema in virtù delle leggi della meccanica; diamo dunque due dimostrazioni equivalenti per il teorema: una estrinseca, l'altra intrinseca.

Dimostrazione. (Estrinseca) Siccome la metrica ds^2 della superficie è indotta dallo spazio euclideo, basta dimostrare che $\|\vec{v}\|_{\mathbb{E}}^2 = v^2$ è costante. Ma si ha che:

$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \vec{a} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}_{\perp} = 0$$

dove la penultima uguaglianza vale perché l'accelerazione ha solo componente normale alla superficie, e l'ultima uguaglianza vale per la perpendicolarità di \vec{v} (giacente sul piano tangente) e \vec{a}_{\perp} (normale alla superficie).

Avendo derivata prima nulla, v^2 deve essere costante, e dunque sono costanti anche $\|\vec{v}\|^2$ e, in definitiva, $\|\vec{v}\|$. \square

Dimostrazione. (Intrinseca)

$$\|\vec{v}\|^2 = v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k$$

da cui:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v^2 &= \frac{d}{dt} (g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k) = \dot{u}^j \dot{u}^k \frac{d}{dt} g_{jk} + g_{jk} \ddot{u}^j \dot{u}^k + g_{jk} \dot{u}^j \ddot{u}^k = \\ &= \dot{u}^j \dot{u}^k \frac{d}{dt} g_{jk} + g_{jk} \ddot{u}^j \dot{u}^k + g_{kj} \dot{u}^k \ddot{u}^j = \dot{u}^j \dot{u}^k \frac{d}{dt} g_{jk} + 2g_{jk} \ddot{u}^j \dot{u}^k = \\ &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j \dot{u}^k + 2g_{jk} \ddot{u}^j \dot{u}^k = \frac{\partial g_{qk}}{\partial u^p} \dot{u}^p \dot{u}^q \dot{u}^k - 2g_{jk} \Gamma_{pq}^j \dot{u}^p \dot{u}^q \dot{u}^k = \\ &= \left(\frac{\partial g_{qk}}{\partial u^p} - 2g_{jk} \Gamma_{pq}^j \right) \dot{u}^p \dot{u}^q \dot{u}^k = 0 \end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza vale avendo scambiato, nell'ultimo addendo, gli indici j, k ; la quarta uguaglianza vale per la simmetria del tensore metrico; la quinta per la derivazione di funzione composta ($\frac{d}{dt} g_{jk} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial u^k} = \frac{\partial^2 \tilde{g}_j}{\partial u^k \partial u^l} \dot{u}^l$); la sesta vale per l'uso dell'equazione geodetica (11.3) ($\ddot{u}^j = -\Gamma_{pq}^j \dot{u}^p \dot{u}^q$) unitamente a un cambio di indici, e infine, nell'ultima uguaglianza, la parentesi si annulla per il Lemma di Ricci, o per la definizione dei simboli di Christoffel. \square

Dal corollario segue immediatamente che la piú generale trasformazione del parametro t che non distrugge il carattere geodetico del moto⁴ è

$$t' = At + B \quad (11.5)$$

Tutti e soli i parametri che verificano questa relazione sono parametri che conservano il carattere geodetico del moto: per come sono costruiti, essi sono detti **parametri affini**.

11.2.2 Geodetiche e parallelismo

Se confrontiamo le equazioni (11.3) delle geodetiche:

$$\ddot{u}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{u}^j \dot{u}^k = 0$$

con le condizioni di parallelismo (10.10) di un campo vettoriale \vec{X} lungo una curva γ :

$$\dot{X}^l(t) + \Gamma_{jk}^l X^j(t) \dot{u}^k = 0$$

⁴Non è un eccessivo abuso di linguaggio parlare per estensione, oltre che di curve geodetiche, anche di moti geodetici e di carattere geodetico del moto.

si osserva che le equazioni dei moti geodetici non affermano altro che il parallelismo del vettore velocità $\vec{v} = \dot{X} = (\dot{u}^j)$ lungo la curva stessa. Dunque la forma intrinseca dell'equazione dei moti geodetici è

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{v} = 0 \quad (11.6)$$

A riprova, vediamo che tale equazione implica l'equazione (11.3) delle geodetiche:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}} \vec{v} &= \nabla_{\vec{v}} \dot{u}^k \vec{g}_k = \dot{u}^k \nabla_{\vec{v}} \vec{g}_k + (\nabla_{\vec{v}} \dot{u}^k) \vec{g}_k = \dot{u}^k \nabla_{\vec{v}} \vec{g}_k + \ddot{u}^k \vec{g}_k = \dot{u}^k \nabla_{\dot{u}^j \vec{g}_j} \vec{g}_k + \ddot{u}^k \vec{g}_k = \\ &= \dot{u}^j \dot{u}^k \nabla_{\vec{g}_j} \vec{g}_k + \ddot{u}^k \vec{g}_k = \dot{u}^j \dot{u}^k \Gamma_{jk}^l \vec{g}_l + \ddot{u}^l \vec{g}_l = (\dot{u}^j \dot{u}^k \Gamma_{jk}^l + \ddot{u}^l) \vec{g}_l \end{aligned}$$

e l'annullarsi del primo membro implica l'annullarsi dell'ultima parentesi, e ci siamo.

Poiché il moto è uniforme, abbiamo dunque subito la caratterizzazione della traiettoria: infatti $\vec{v} = a\vec{t}$, con \vec{t} versore tangente alla traiettoria e a costante reale. Dunque:

$$\nabla_{\vec{v}} \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla_{a\vec{t}} a\vec{t} = a^2 \nabla_{\vec{t}} \vec{t} = 0$$

da cui si ha immediatamente:

$$\nabla_{\vec{t}} \vec{t} = 0 \quad (11.7)$$

Quest'ultima è l'equazione delle **curve geodetiche** che caratterizza non tanto il moto o la meccanica, quanto la vera e propria geometria della traiettoria. Possiamo dare allora la cosiddetta definizione affine⁵ di curva geodetica:

Definizione 11.3. *Le curve geodetiche sono le curve **autoparallele***

Ciò è vero dal momento che il versore tangente si mantiene sempre parallelo lungo la curva. Le geodetiche sono, quindi, quelle curve in cui il trasporto per parallelismo conserva il vettore tangente: in ogni punto, il trasportato per parallelismo del vettore tangente è ancora il vettore tangente.

11.3 Geodetiche come curve di curvatura nulla

11.3.1 Curvatura geodetica

Abbiamo sviluppato (paragrafo 6.1) la teoria della curvatura normale di Eulero:

$$k_N = \vec{k} \cdot \vec{N} = \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{N}$$

⁵L'aggettivo "affine" è dovuto al fatto che tale definizione si basa sul concetto di parallelismo, e non sul concetto di angolo o distanza.

che abbiamo utilizzato per introdurre la nozione di curvatura gaussiana K della superficie.

Studiamo adesso la parte complementare, vale a dire la parte tangente del vettore curvatura \vec{k} , detta **curvatura geodetica**. Riprendiamo infatti la seguente definizione:

Definizione. 6.2. *Si chiama **curvatura geodetica** di una curva γ giacente su S e passante per P , la componente tangente del vettore curvatura di γ in P :*

$$\vec{k}_g = \vec{k} - k_N \vec{N}$$

Si noti che, mentre per la curvatura normale era sufficiente avere k_N come scalare, essendo la direzione normale univocamente determinata⁶, quanto alla curvatura geodetica, è necessario definirla come vettore (differenza di vettori), in quanto è combinazione lineare dei vettori della base naturale.

Non abbiamo fatto altro che scomporre il vettore curvatura in una parte normale e in una parte tangente:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{k} = \vec{k}_g + k_N \vec{N} \quad (11.8)$$

Nel caso di una curva piana ($k_N = 0$) si ha che la curvatura geodetica coincide con il vettore curvatura ($\vec{k}_g = \vec{k}$).

Da questo punto di vista, possiamo dare la seguente definizione, come estensione del punto [ii] del paragrafo 11.1:

Definizione 11.4. *Si chiamano **curve geodetiche** le curve su S aventi curvatura geodetica nulla ($\vec{k}_g = 0$).*

Dimostriamo che tale definizione è compatibile con l'equazione geodetica (11.3) data precedentemente (e dunque anche con la condizione di autoparallelismo che da essa deriva).

Teorema 11.3.

$$\vec{k}_g = 0 \Leftrightarrow \ddot{u}^m + \Gamma_{jk}^m \dot{u}^j \dot{u}^k = 0$$

Corollario 11.4. \vec{k}_g è una grandezza intrinseca.

⁶Infatti stiamo sempre operando con superfici di dimensione n in spazi di dimensione $n + 1$.

Dimostrazione. Utilizziamo per comodità il parametro arco al posto del generico parametro t . Dire che $\vec{k}_g = 0$ significa dire che $\forall j$:

$$\begin{aligned}
 0 &= \vec{k} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^j} = \\
 &= \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^j} = \\
 &= \frac{d}{ds} \left(\vec{t} \cdot \frac{\partial P}{\partial u^j} \right) - \vec{t} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial u^j \partial u^k} \frac{du^k}{ds} = \\
 &= \frac{d}{ds} \left(\left(\frac{du^l}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \right) \frac{\partial P}{\partial u^j} \right) - \frac{du^l}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \left(\Gamma_{jk}^m \frac{\partial P}{\partial u^m} + a_{jk} \vec{N} \right) \frac{du^k}{ds} = \\
 &= \frac{d}{ds} \left(\frac{du^l}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \frac{\partial P}{\partial u^j} \right) - \frac{du^l}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \left(\Gamma_{jk}^m \frac{\partial P}{\partial u^m} \right) \frac{du^k}{ds} = \\
 &= \left(\frac{d^2 u^l}{ds^2} \frac{\partial P}{\partial u^l} \frac{\partial P}{\partial u^j} + \frac{du^l}{ds} \left(\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \right) \frac{\partial P}{\partial u^j} + \frac{du^l}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \left(\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^j} \right) \right) - \frac{du^l}{ds} \Gamma_{jk}^m \frac{\partial P}{\partial u^l} \frac{\partial P}{\partial u^m} \frac{du^k}{ds} = \\
 &= \frac{d^2 u^l}{ds^2} g_{lj} + \frac{du^l}{ds} \left(\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \right) \frac{\partial P}{\partial u^j} + \frac{du^l}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \left(\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^j} \right) - \frac{du^l}{ds} \Gamma_{jk}^m g_{lm} \frac{du^k}{ds} = \\
 &= \frac{d^2 u^l}{ds^2} g_{lj} + \frac{du^l}{ds} \left(\left(\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^l} \right) \frac{\partial P}{\partial u^j} + \frac{\partial P}{\partial u^l} \left(\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^j} \right) - \Gamma_{jk}^m g_{lm} \frac{du^k}{ds} \right) = \\
 &= \frac{d^2 u^l}{ds^2} g_{lj} + \frac{du^l}{ds} \left(\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u^k \partial u^l} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{\partial P}{\partial u^j} + \frac{\partial P}{\partial u^l} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial u^k \partial u^j} \frac{du^k}{ds} \right) - \Gamma_{jk}^m g_{lm} \frac{du^k}{ds} \right) = \\
 &= \frac{d^2 u^l}{ds^2} g_{lj} + \frac{du^l}{ds} \left(\left(\Gamma_{lk}^m \frac{\partial P}{\partial u^m} + a_{lk} \vec{N} \right) \frac{du^k}{ds} \frac{\partial P}{\partial u^j} + \frac{\partial P}{\partial u^l} \left(\Gamma_{jk}^m \frac{\partial P}{\partial u^m} + a_{jk} \vec{N} \right) \frac{du^k}{ds} - \Gamma_{jk}^m g_{lm} \frac{du^k}{ds} \right) = \\
 &= \frac{d^2 u^l}{ds^2} g_{lj} + \frac{du^l}{ds} \left(\Gamma_{lk}^m \frac{\partial P}{\partial u^m} \frac{\partial P}{\partial u^j} \frac{du^k}{ds} + \Gamma_{jk}^m \frac{\partial P}{\partial u^l} \frac{\partial P}{\partial u^m} \frac{du^k}{ds} - \Gamma_{jk}^m g_{lm} \frac{du^k}{ds} \right) = \\
 &= \frac{d^2 u^l}{ds^2} g_{lj} + \frac{du^l}{ds} \left(\Gamma_{lk}^m g_{mj} \frac{du^k}{ds} + \Gamma_{jk}^m g_{lm} \frac{du^k}{ds} - \Gamma_{jk}^m g_{lm} \frac{du^k}{ds} \right) = \\
 &= \frac{d^2 u^l}{ds^2} g_{lj} + \frac{du^l}{ds} \Gamma_{lk}^m g_{mj} \frac{du^k}{ds} = \\
 &= \frac{d^2 u^m}{ds^2} g_{mj} + \frac{du^l}{ds} \Gamma_{lk}^m g_{mj} \frac{du^k}{ds} = \\
 &= g_{mj} \left(\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{lk}^m \frac{du^l}{ds} \frac{du^k}{ds} \right)
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato pesantemente la scrittura delle equazioni di Gauss e la perpendicolarità tra \vec{N} e $\frac{\partial P}{\partial u^j}$, che forza molti prodotti scalari a essere nulli. Questa relazione deve valere per ogni scelta di j : per le ipotesi di regolarità il tensore metrico g_{mj} non può essere identicamente nullo, dunque deve necessariamente annullarsi ciò che si trova all'interno della parentesi. Ma porre uguale a zero tale quantità fornisce esattamente le equazioni delle

geodetiche:

$$\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{lk}^m \frac{du^l}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

$$u''^m + \Gamma_{lk}^m u'^l u'^k = 0$$

Il corollario discende immediatamente dall'intrinsecità di $u''^m + \Gamma_{lk}^m u'^l u'^k$.⁷ \square

Ne deriva una semplice caratterizzazione estrinseca delle geodetiche:

Teorema 11.5 (Clairot). *Una curva γ è una geodetica se e solo se in ogni punto la normale principale è diretta come la normale alla superficie.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata; dalla definizione (11.4) infatti si ha che γ è una geodetica se e solo se $\vec{k}_g = 0$, ma dall'equazione (11.8):

$$\vec{k}_g = 0 \Leftrightarrow \vec{k} = k_N \vec{N} \Leftrightarrow \vec{n} \wedge \vec{N} = 0$$

dove l'ultima coimplicazione vale dal momento che \vec{k} e \vec{n} hanno la stessa direzione. \square

Esempio: sfera. Dal Teorema di Clairot vediamo immediatamente gli archi di meridiani sono geodetiche su una sfera (infatti la normale principale dei meridiani è diretta sempre come il raggio e dunque, in definitiva, come la normale alla superficie).

11.4 Geodetiche come curve di minima lunghezza

Possiamo dare un'ulteriore caratterizzazione equivalente delle geodetiche (derivante dalla [i.] del paragrafo 11.1, forse la più appariscente:

Definizione 11.5. *Le geodetiche sono le curve di minima lunghezza.*

⁷In alternativa, si può dedurre più rapidamente l'intrinsecità di \vec{k}_g notando che:

$$\vec{k}_g = \prod_{T_P S} \left(\frac{d\vec{t}}{ds} \right) = \prod_{T_P S} (\nabla_{\vec{t}}^{\mathbb{E}} \vec{t}) = \nabla_{\vec{t}} \vec{t}$$

dove la seconda uguaglianza è vera per la definizione di derivata direzionale in uno spazio euclideo e la terza vale per la definizione di derivata direzionale superficiale (o di derivata covariante alla Levi-Civita). Dall'intrinsecità della derivata covariante discende subito l'intrinsecità della curvatura geodetica.

Infatti possiamo mostrare che:

$$\ddot{u}^j(t) + \Gamma_{hk}^j \dot{u}^h \dot{u}^k = 0 \Leftrightarrow \forall \dot{u}^j, \dot{u}^k : \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k} dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k} dt \quad (11.9)$$

il che equivale a dire che la lunghezza della geodetica è minore o uguale della lunghezza di una qualsiasi altra curva. Per far vedere l'equivalenza (11.9), serviamoci della meccanica e in particolare delle equazioni di Lagrange.

11.4.1 Equazioni di Lagrange

Osserviamo infatti che possiamo riscrivere le equazioni delle geodetiche come traiettorie di particelle che si muovono in assenza di forze. Questo risultato è ovvio, dal momento che le equazioni delle geodetiche sono le proiezioni delle equazioni di Newton in assenza di forze attive. Formalmente definiamo la lagrangiana L :

$$L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}g_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k \quad (11.10)$$

o, più esplicitamente, nel caso bidimensionale:

$$L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(E(\dot{u}^1)^2 + 2F\dot{u}^1\dot{u}^2 + G(\dot{u}^2)^2) \quad (11.11)$$

Scriviamo ora le equazioni di Lagrange per la coordinata u^k :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} - \frac{\partial L}{\partial u^k} = 0 \quad (11.12)$$

E dato che:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} = g_{jk}\dot{u}^j; \quad \frac{\partial L}{\partial u^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} \dot{u}^l \dot{u}^j$$

e inoltre:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} = g_{jk}\ddot{u}^j + \frac{dg_{jk}}{dt} \dot{u}^j = g_{jk}\ddot{u}^j + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j = g_{jk}\ddot{u}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} \dot{u}^l \dot{u}^j + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} \dot{u}^j \dot{u}^l$$

dove l'ultima uguaglianza vale per la scissione della sommatoria e lo scambio di indici tra l e j . Le equazioni di Lagrange dunque diventano:

$$g_{jk}\ddot{u}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^l \dot{u}^j = 0$$

Moltiplichiamo ora per g^{hk} , al fine di ricondurre tali equazioni in forma normale⁸:

$$g^{hk} g_{jk}\ddot{u}^j + \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^l \dot{u}^j = 0$$

⁸Ovvero facendo in modo che il coefficiente della derivata di grado massimo sia 1.

Ma $g^{hk}g_{kj}$ è il prodotto righe per colonne del tensore metrico con il suo inverso: ne risulta l'identità e, visto che il generico elemento di tale matrice è (h, j) , si ha immediatamente che $g^{hk}g_{kj} = \delta_{jh}$, indicando con δ_{jh} il delta di Kronecker. Dunque:

$$\delta_{jh}\ddot{u}^j + \frac{1}{2}g^{hk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k}\right)\dot{u}^l\dot{u}^j = \ddot{u}^h + \Gamma_{jl}^h\dot{u}^l\dot{u}^j = 0 \quad (11.13)$$

dove l'ultimo passaggio vale per la definizione dei simboli di Christoffel. Queste sono dunque le equazioni di Lagrange in forma normale: tali equazioni ci forniscono un modo veloce per ricavare i simboli di Christoffel, come peraltro avevamo già fatto in un esercizio del paragrafo 9.4.1. Infatti, basta calcolare $L = \frac{1}{2}v^2$ nelle coordinate assegnate, scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e risolverle rispetto alle derivate seconde (ossia, metterle in forma normale): i coefficienti dei termini quadratici nella velocità risultano essere proprio i simboli di Christoffel (prestando attenzione ai termini misti, il cui simbolo di Christoffel è logicamente la metà del coefficiente).

Siamo così passati dalle equazioni geodetiche alle equazioni di Lagrange. Dalle conoscenze di meccanica sappiamo che tali condizioni sono condizioni di minimo del funzionale di Hamilton. Passando al formalismo hamiltoniano, per il principio di Hamilton è minimo anche $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$ e dunque $\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{L} dt$. Ma d'altra parte:

$$\sqrt{L} = \sqrt{\frac{1}{2}v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}v$$

e dunque dire che $\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{L} dt$ è minimo significa dire che è minimo $\frac{\delta}{\sqrt{2}} \int_{t_0}^{t_1} v dt$

o, in definitiva, che è minima la lunghezza $s = \int_{t_0}^{t_1} v dt$, e ci siamo.

Esempio: piano in coordinate polari Ricalcoliamo, alla luce della spiegazione teorica, le equazioni di Lagrange e i simboli di Christoffel per il piano in coordinate polari.

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2$$

Dalla Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2)$$

si ha che:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \dot{\rho}; \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = \rho \dot{\theta}^2; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \rho^2 \dot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

dove l'ultima equazione ci mostra che la Lagrangiana è ciclica in θ ; le equazioni di Lagrange sono:

$$\begin{cases} \rho : \frac{d\dot{\rho}}{dt} - \rho\dot{\theta}^2 = 0 \rightsquigarrow \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = 0 \\ \theta : \frac{d(\rho^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \rightsquigarrow \rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è già in forma normale. Per portare in forma normale la seconda equazione basta dividere per ρ^2 :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\theta} = 0$$

Dunque abbiamo immediatamente che:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\rho}^{\rho} &= 0 & \Gamma_{\rho\theta}^{\rho} &= 0 & \Gamma_{\theta\theta}^{\rho} &= -\rho \\ \Gamma_{\rho\rho}^{\theta} &= 0 & \Gamma_{\rho\theta}^{\theta} &= \frac{1}{\rho} & \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

in accordo con quanto già trovato precedentemente.

Esempio: semipiano iperbolico di Poincaré. Il semipiano iperbolico di Poincaré è un esempio di geometria non euclidea, di varietà riemanniana *non immersa* in cui è violato il postulato delle parallele, poiché non è garantito il parallelismo di due rette che non si intersecano mai. Definiamo innanzitutto tale varietà come l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $y > 0$, che è il semipiano positivo del piano cartesiano (e dunque le coordinate cartesiane sono un sistema globale di coordinate). Cambiamo però arbitrariamente la definizione di distanza su questo piano definendo:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (11.14)$$

che è la distanza euclidea pesata, però, con la distanza dei punti dall'asse x . Il tensore metrico è $\begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$; è importante tenere presente che questa metrica non è indotta da alcuna immersione: il semipiano di Poincaré non eredita alcuna nozione di distanza dal piano euclideo (dal momento che tale varietà riemanniana non è immersa).

Le geodetiche sono le semirette (o i segmenti) paralleli all'asse y e le semicirconferenze (o loro archi) aventi centro sull'asse x (si noti che l'asse x non

è incluso nella varietà). Per verificarlo utilizziamo ancora una volta la caratterizzazione delle geodetiche come moto inerziale. Dunque scriviamo le equazioni di Lagrange.

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \Rightarrow v^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

$$L = \frac{1}{2}v^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y^2}$$

La Lagrangiana è ciclica in x . Le sue derivate parziali sono:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{y^2}; \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{y^2}; \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3}$$

e le equazioni di Lagrange sono:

$$x : \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{y^2} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{y^2} \right) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} = 0 \end{cases}$$

$$x : \begin{cases} \frac{\ddot{x}}{y^2} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y^3} = 0 \rightsquigarrow \ddot{x} - \frac{2}{y}\dot{x}\dot{y} = 0 \\ \frac{\ddot{y}}{y^2} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}^2}{y^3} = 0 \rightsquigarrow \ddot{y} + \frac{1}{y}\dot{x}^2 - \frac{1}{y}\dot{y}^2 = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\Gamma_{11}^1 = 0 \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y} \quad \Gamma_{22}^1 = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{y} \quad \Gamma_{12}^2 = 0 \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

Già che abbiamo i simboli di Christoffel, calcoliamo la curvatura gaussiana K : dato che abbiamo la prima forma (seppure questa volta non riconducibile alla restrizione di alcun prodotto scalare) ciò è possibile. Infatti:

$$R_{212}^1 = \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x} + \Gamma_{21}^s \Gamma_{s2}^1 - \Gamma_{22}^s \Gamma_{s1}^1 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$R_{1212} = g_{1s} R_{212}^s = g_{11} R_{212}^1 + g_{12} R_{212}^2 = \frac{1}{y^2} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^4}$$

$$K = -\frac{R_{1212}}{\det \hat{\mathbf{I}}} = -\frac{1/y^4}{1/y^4} = -1$$

Troviamo dunque che il semipiano di Poincaré ha curvatura gaussiana negativa ($K = -1$): per tale ragione è detto semipiano **iperbolico**.

Le geodetiche sono le soluzioni delle equazioni di Lagrange. Le rette $\begin{cases} x = \text{cost} \\ y = t \end{cases}$ sono soluzioni? Riparametrizziamo la retta in modo tale che abbia velocità costante. Per far ciò calcoliamone la metrica:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dt^2}{t^2} \Rightarrow ds = \frac{dt}{t}$$

e risolvendo l'equazione differenziale, ricaviamo $s = \ln t$, da cui $t = e^s$. La riparametrizzazione della retta avente velocità unitaria è dunque: $\begin{cases} x = \text{cost} \\ y = e^s \end{cases}$, che verifica banalmente la prima equazione di Lagrange e verifica anche la seconda ($e^s + 0 - e^{-s}e^{2s} = 0$). Dunque tale curva è una geodetica. Analogamente si può verificare con le circonferenze aventi centro sull'asse x .

Si noti che la lunghezza delle geodetiche è infinita, dal momento che all'av-

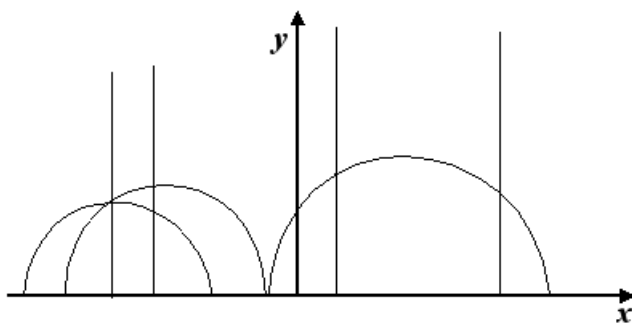


Figura 11.1: Geodetiche nel semipiano di Poincaré

vicinarsi della curva all'asse x , $ds \rightarrow +\infty$. Inoltre si nota immediatamente che la parallela a una geodetica passante per un dato punto non è unica, anzi, ve ne sono infinite (dunque non è verificato il postulato delle parallele).

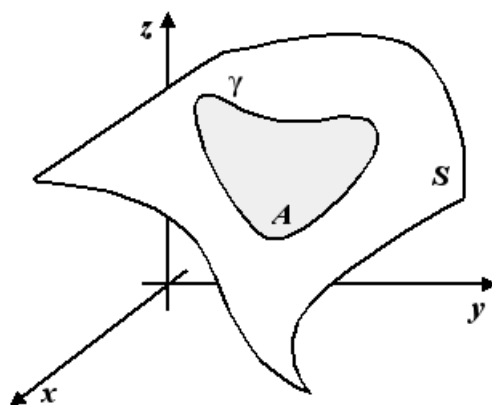
Capitolo 12

Il Teorema di Gauss-Bonnet

Il Teorema di Gauss-Bonnet è un teorema riassuntivo che raccorda diversi ambiti dello studio delle superfici. Nella sua forma più generale può essere visto come la generalizzazione del Teorema di Euclide¹, più specificatamente si traduce in una relazione integrale tra la curvatura geodetica di un contorno e la curvatura gaussiana della superficie su cui il contorno è tracciato.

12.1 Curve regolari

Il teorema ha diverse formulazioni; la più semplice riguarda curve semplici, regolari, senza punti angolosi e contraibili con continuità sino ad un punto.



Teorema 12.1 (Gauss-Bonnet). *Se γ è una curva chiusa semplice su una*

¹Euclide affermava che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a un angolo piatto.

superficie regolare S e A è la superficie racchiusa da tale curva, allora²:

$$\int_{\partial A} k_g ds = 2\pi - \iint_A K dA$$

dove ∂A indica la frontiera di A .

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema, facciamo uso della teoria della **base mobile di Cartan**: consideriamo dunque nel piano tangente una base ortonormata $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{N})$ scorrelata in base alle coordinate. Ovvero, data una superficie parametrizzata con (u, v) , l'idea è di sostituire alla base di Gauss (\vec{g}_u, \vec{g}_v) una base ortonormata³ e equiorientata, in modo tale che⁴:

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{N} = \text{vers}(\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2) = \frac{\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2}{\sqrt{EG - F^2}}$$

dove la prima uguaglianza ci assicura la perpendicolarità di $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{N})$ e la seconda l'equiorientazione.

Operare con una base ortonormata semplifica la scrittura delle **equazioni di struttura** (il corrispettivo delle equazioni di Frenet per le curve). Infatti, la matrice di Cartan delle derivate dei vettori della base mobile sviluppate rispetto alla base stessa deve essere antisimmetrica a causa dell'ortonormalità della base⁵. Dunque la diagonale principale deve essere nulla e, in particolare, abbiamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial u} = \quad + \alpha \vec{e}_2 + \lambda_1 \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial u} = -\alpha \vec{e}_1 \quad + \lambda_2 \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = -\lambda_1 \vec{e}_1 - \lambda_2 \vec{e}_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial v} = \quad + \beta \vec{e}_2 + \mu_1 \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial v} = -\beta \vec{e}_1 \quad + \mu_2 \vec{N} \\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = -\mu_1 \vec{e}_1 - \mu_2 \vec{e}_2 \end{array} \right.$$

²Si può anche scrivere:

$$\int_{\gamma} k_g ds = 2\pi - \iint_{\text{int}(\gamma)} K dA$$

sostituendo a ∂A la curva γ e, al posto di A , $\text{int}(\gamma)$, intendendo con tale notazione la porzione di superficie interna a γ .

³Ciò è sempre possibile mediante, ad esempio, l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

⁴Si ricordi che:

$$\|\vec{g}_u \wedge \vec{g}_v\| = \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2}$$

⁵Il ragionamento è del tutto analogo a quello compiuto al paragrafo 3.2.

Le precedenti equazioni definiscono i coefficienti $(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$: l'idea è di cercare le condizioni di compatibilità a cui tali coefficienti sono vincolati. Il procedimento è analogo a quanto fatto per le condizioni di Gauss-Mainardi-Codazzi: imponiamo l'uguaglianza delle derivate seconde miste.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{e}_1}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial \alpha}{\partial v} \vec{e}_2 + \alpha \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial v} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} \vec{N} + \lambda_1 \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial v} \vec{e}_2 + \alpha(-\beta \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{N}) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} \vec{N} - \lambda_1(\mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \vec{e}_1}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial \beta}{\partial u} \vec{e}_2 + \beta \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial u} + \frac{\partial \mu_1}{\partial u} \vec{N} + \mu_1 \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = \\ &= \frac{\partial \beta}{\partial u} \vec{e}_2 + \beta(-\alpha \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{N}) + \frac{\partial \mu_1}{\partial u} \vec{N} - \mu_1(\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2)\end{aligned}$$

Dall'uguaglianza di tali quantità ricaviamo che:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} \vec{e}_2 + \mu_2 \vec{N} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} \vec{N} - \mu_2 \vec{e}_2 = \frac{\partial \beta}{\partial u} \vec{e}_2 + \lambda_2 \vec{N} + \frac{\partial \mu_1}{\partial u} \vec{N} - \lambda_2 \vec{e}_2$$

e per l'unicità di scrittura di un vettore su una base i coefficienti di \vec{e}_2 e di \vec{N} devono essere uguali, da cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u} = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} - \frac{\partial \mu_1}{\partial u} = \beta \lambda_2 - \alpha \mu_2 \end{array} \right. \quad (12.1)$$

Il Teorema di Gauss-Bonnet è legato alla prima di queste due equazioni. L'idea è che, per analogia con la formula (9.3):

$$\frac{\partial \Gamma_{qj}^p}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^p}{\partial u^j} + \Gamma_{qj}^l \Gamma_{lk}^p - \Gamma_{qk}^l \Gamma_{lj}^p = a_{qk} b_j^p - a_{qj} b_k^p$$

la prima equazione del sistema (12.1) potrebbe avere lo stesso significato dell'equazione di compatibilità di Gauss. Il confronto tra le due suggerisce che $\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}$ potrebbe rimandare al tensore di Riemann mentre invece il termine $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ potrebbe essere una misura della curvatura gaussiana della superficie (studiata da un punto di vista estrinseco, mediante il variare della normale \vec{N}).

Punto 1: formula della curvatura gaussiana. Riscriviamo lo sviluppo delle derivate della normale sulla base mobile:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = -\lambda_1 \vec{e}_1 - \lambda_2 \vec{e}_2 \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = -\mu_1 \vec{e}_1 - \mu_2 \vec{e}_2$$

e ricordiamo le equazioni di Weingarten⁶

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = -S_1 \vec{g}_u - S_2 \vec{g}_v \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = -S_3 \vec{g}_u - S_4 \vec{g}_v$$

Calcoliamo in entrambi i casi il prodotto scalare $\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}$:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) \vec{N}$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = (S_1 S_4 - S_2 S_3) \vec{g}_u \wedge \vec{g}_v = \det S \cdot \|\vec{g}_u \wedge \vec{g}_v\| \cdot \vec{N} = K \sqrt{EG - F^2} \cdot \vec{N}$$

Dunque, dal confronto, otteniamo che:

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = K \sqrt{EG - F^2} \quad (12.2)$$

e quindi $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ è una misura intrinseca la curvatura gaussiana. L'equazione di compatibilità

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u} = K \sqrt{EG - F^2} \quad (12.3)$$

è quindi una sorta di riformulazione del Theorema Egregium.

Punto 2: formula della curvatura geodetica. Rispetto alla base mobile, il versore tangente a γ e il suo complemento ortogonale sul piano tangente $\vec{N} \wedge \vec{t}$ hanno espressione:

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \\ \vec{N} \wedge \vec{t} &= -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \end{aligned}$$

con θ angolo individuato dal versore \vec{e}_1 e il versore \vec{t} tangente alla curva. La curvatura geodetica di γ è vincolata dalla formula:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{t}}{ds} = k_N \vec{N} + k_g (\vec{N} \wedge \vec{t}) + 0 \cdot \vec{t}$$

⁶Si ricordi che i termini b_k^l non erano altro che gli elementi della matrice dell'operatore di forma $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_3 \\ S_2 & S_4 \end{pmatrix}$, con l indice di riga e k indice di colonna.

dal momento che la derivata del versore tangente non ha componenti sul versore stesso; e dunque:

$$\begin{aligned}
k_g &= (\vec{N} \wedge \vec{t}) \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = \\
&= (-\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2) \cdot \left[\cos \theta \frac{d\vec{e}_1}{ds} + \sin \theta \frac{d\vec{e}_2}{ds} + \frac{d\theta}{ds} (-\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2) \right] = \\
&= \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds} + \cos^2 \theta \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds} - \sin^2 \theta \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} + \sin \theta \cos \theta \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} = \\
&= \frac{d\theta}{ds} + \cos^2 \theta \vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds} - \sin^2 \theta \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} = \\
&= \frac{d\theta}{ds} - \vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} =
\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza vale per la perpendicolarità di \vec{e}_i e $\frac{d\vec{e}_i}{ds}$, mentre l'ultima uguaglianza vale dal momento che $\vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\vec{e}_2 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds}$ (fatto che si deduce dalla regola di Leibniz applicata sul prodotto scalare nullo $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$).

Ma allora, ricordandoci che $\frac{d\vec{e}_2}{ds} = \frac{d\vec{e}_2}{ds}(u, v)$:

$$\begin{aligned}
k_g &= \frac{d\theta}{ds} - \vec{e}_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \right) = \\
&= \frac{d\theta}{ds} + \vec{e}_1 \cdot \left((-\alpha \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{N}) \frac{\partial u}{\partial s} + (-\beta \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{N}) \frac{\partial v}{\partial s} \right)
\end{aligned}$$

e dunque:

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + \alpha \frac{\partial u}{\partial s} + \beta \frac{\partial v}{\partial s} \quad (12.4)$$

Per le curve nel piano avevamo definito la curvatura di una linea (che in questo caso coincide, logicamente, con la curvatura geodetica, non essendoci alcuna curvatura normale) come $k = \frac{d\theta}{ds}$. La formula (12.4) è la naturale estensione alle superfici - il "prezzo da pagare" è l'utilizzo della base mobile: non sarebbe possibile ottenere un risultato analogo con una base fissa.

Punto 3: Teoremi di Green e Hopf. Possiamo facilmente riscrivere le due formule fondamentali (12.3) e (12.4) come⁷:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \beta}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) dudv &= -K \sqrt{EG - F^2} dudv = -K dA \\
\alpha du + \beta dv &= k_g ds - d\theta
\end{aligned} \quad (12.5)$$

⁷Si ricordi che $\sqrt{EG - F^2} dudv$ è l'elemento infinitesimo di area.

Dall'analisi, sappiamo che il Teorema di Green mette in relazione le grandezze ai primi membri del sistema del sistema. Infatti, detta A la superficie racchiusa dalla curva γ (orientata positivamente):

$$\int_{\partial A} \alpha du + \beta dv = \iint_A \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) dudv \quad (12.6)$$

Ma allora, naturalmente:

$$\int_{\partial A} k_g ds - d\theta = - \iint_A K dA \quad (12.7)$$

o ancora:

$$\int_{\partial A} k_g ds = \int_{\partial A} d\theta - \iint_A K dA \quad (12.8)$$

Inoltre, per il Teorema di Hopf, se la curva γ è semplice e contraibile con continuità ad un punto, allora facendo ruotare il vettore tangente alla curva su tutta la curva, alla fine del giro, tale vettore è ruotato di un angolo pari a 2π ; o, in simboli:

$$\int_{+\gamma} d\theta = 2\pi \quad (12.9)$$

dove con $+\gamma$ si intende la curva γ orientata positivamente. Ricordandoci che $\gamma = \partial A$, possiamo inserire tale risultato nell'equazione (12.8), ottenendo la tesi. \square

Si noti che la tesi del Teorema di Gauss-Bonnet mette in relazione la circuitazione di k_g sul contorno γ e il flusso della curvatura gaussiana K .

12.2 Estensione: curve con punti angolosi

Estendiamo ora il teorema al caso di curve con punti angolosi. Se infatti prima su una curva senza spigoli il vettore tangente, in una giro completo, descriveva un angolo pari all'angolo giro, nel caso in cui la curva abbia punti di non derivabilità, tale risultato non vale più. In corrispondenza di ogni punto angoloso, infatti, il vettore tangente compirà un certo "salto" (fig. 12.1). Chiamiamo δ_k l'angolo esterno del "salto" in corrispondenza dell' k -esimo punto angoloso. L'enunciato del Teorema di Hopf, sotto queste ipotesi, va rivisto nel modo seguente:

$$\sum_{k=1}^n \delta_k + \int_{+\gamma} d\theta = 2\pi \quad (12.10)$$

ove n è il numero dei punti angolosi. Al primo membro la sommatoria rende conto della curvatura concentrata ai vertici (dei "salti"), l'integrale invece

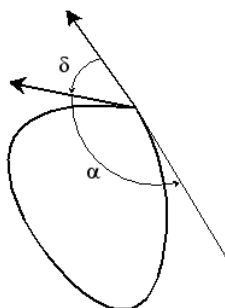


Figura 12.1: Curva con un punto angoloso

rende conto della curvatura distribuita lungo γ . Se la curva non è semplice, allora, l'enunciato del Teorema di Gauss-Bonnet va corretto nel seguente modo:

$$\int_{\partial A} k_g ds = 2\pi - \sum_{k=1}^n \delta_k - \iint_A K dA \quad (12.11)$$

Infine, se invece degli angoli esterni δ_k consideriamo i loro corrispondenti angoli interni α_k , si ha che, naturalmente:

$$\delta_k = \pi - \alpha_k$$

e dunque:

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = \sum_{k=1}^n (\pi - \alpha_k) = n\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

da cui, l'enunciato del Teorema di Gauss-Bonnet diventa:

$$\int_{\partial A} k_g ds = (2 - n)\pi + \sum_{k=1}^n \alpha_k - \iint_A K dA \quad (12.12)$$

Esempio: poligoni geodetici.

Definizione 12.1. *Chiamiamo poligoni geodetici le figure il cui contorno è una curva chiusa γ a tratti costituito da geodetiche.*

Consideriamo ad esempio un triangolo geodetico sulla sfera, per fissare le idee il triangolo corrispondente alla parte di sfera che si trova nel primo ottante. Esso ha tre punti angolosi, e in corrispondenza di tali punti il vettore tangente descrive dei “salti”. Per misurare gli angoli di questi “salti” dovremmo servirci della nozione di prodotto scalare sulla sfera; tuttavia sappiamo che tale prodotto scalare è indotto dal prodotto scalare euclideo. Osserviamo dunque immediatamente che in corrispondenza di

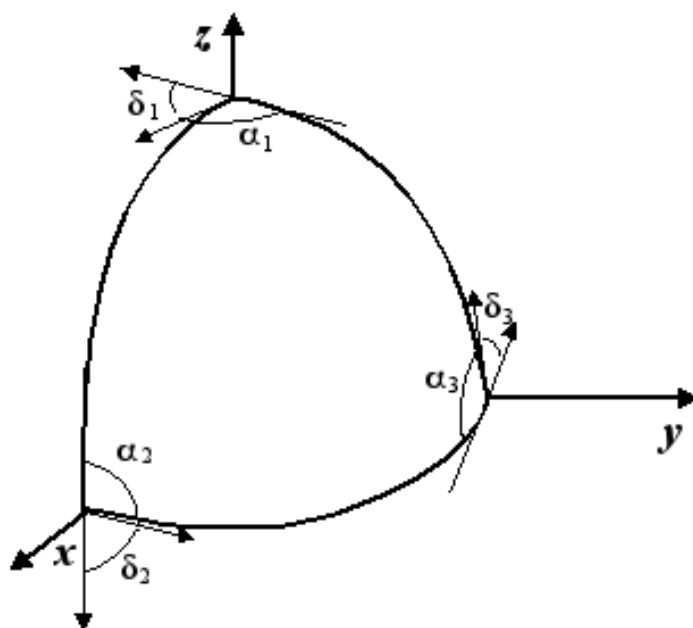


Figura 12.2: Teorema di Gauss-Bonnet per il triangolo geodetico su S^2

ogni “spigolo” il vettore tangente compie una rotazione di un angolo retto ($\forall k \in \{1, 2, 3\} \quad \alpha_k = \delta_k = \pi/2$). Sommando i tre “salti” otteniamo che:

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_k = \frac{3}{2}\pi$$

Notiamo che dunque la somma degli angoli interni non è più pari a π (teorema di Euclide), bensì esiste un eccesso (in questo caso di $\pi/2$ legato all’area del triangolo geodetico). Il teorema di Gauss-Bonnet ci fornisce appunto il legame tra quest’eccesso e l’area della figura racchiusa dalla curva. Dato che le curve sono tutte geodetiche, $k_g = 0$, e dunque (per Gauss-Bonnet):

$$\iint_A K dA + (n-2)\pi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \quad (12.13)$$

Questo risultato vale per ogni poligonale geodetica; se consideriamo il caso di un triangolo piano, $K = 0$, $n = 3$, ritroviamo il Teorema di Euclide: $\sum_{k=1}^n \alpha_k = \pi$. Se invece consideriamo il caso del triangolo geodetico sulla sfera, $K \neq 0$, e dunque esiste un eccesso che dipende dall’area della poligonale geodetica.

Esempio: geodetiche nel semipiano di Poincaré. Cosa accade per superfici a curvatura negativa? Consideriamo l'esempio già discusso del semipiano di Poincaré, in cui le geodetiche erano i segmenti verticali e gli archi di circonferenze aventi centro sull'asse x . In questo caso (diversamente dalla sfera), la metrica del semipiano non è indotta dalla metrica euclidea (infatti si ha che $ds = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$). Tuttavia, pur non essendo uguale alla metrica euclidea, la metrica del semipiano di Poincaré è **conforme** ad essa, intendendo che è ad essa *proporzionale*: $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$. Ciò implica che la valutazione delle distanze differirà di un fattore λ , mentre inevitabilmente gli angoli saranno preservati. Possiamo così utilizzare la metrica euclidea per misurare gli angoli nel semipiano di Poincaré.

Consideriamo allora la seguente poligonale geodetica (fig. 12.3): la se-

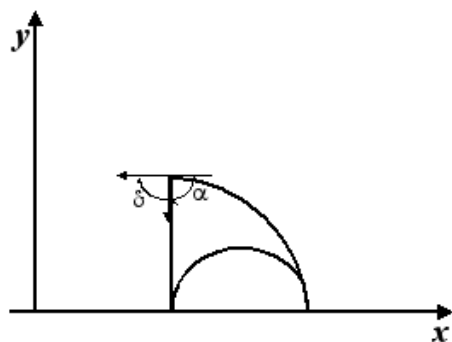


Figura 12.3: Teorema di Gauss-Bonnet nel semipiano di Poincaré

micirconferenza di raggio 1 avente centro in $(3, 0)$, il segmento verticale di lunghezza 2 spiccato dal punto $(2, 0)$ e infine l'arco di circonferenza che unisce i punti $(2, 2)$ e $(4, 0)$. Abbiamo che, in questo caso, due dei tre angoli interni dei salti sono nulli, mentre uno vale $\pi/2$ (precisamente quello tra il segmento e la circonferenza più esterna). Dunque $\sum_{k=1}^3 \alpha_k = \frac{\pi}{2}$ e in questo caso abbiamo che la somma di angoli interni è minore di π . Dunque, dal Teorema di Gauss-Bonnet abbiamo che:

$$\int_A K dA + \pi = \frac{\pi}{2}$$

o anche, ricordandoci che $K = -1$ e che dA è l'elemento infinitesimo di area:

$$\int_A \sqrt{EG - F^2} dudv = \frac{\pi}{2}$$

che è la relazione che lega la circuitazione della curvatura geodetica sul contorno e il flusso di K .

Indice

I	Geometria delle curve	3
1	Curve nel piano	5
1.1	Definizione e primi esempi	5
1.1.1	Curve parametrizzate	6
1.1.2	Curve date per equazione	6
1.2	Lunghezza di una curva	13
1.2.1	Parametro arco	14
1.3	Curvatura	14
1.3.1	Calcolo di k con la parametrizzazione naturale	15
1.3.2	Calcolo di k con parametrizzazione arbitraria	16
1.4	Formule di Frenet	19
1.5	Teorema fondamentale di Bonnet (caso piano)	21
2	Evoluta, evolvente e involuppo	25
2.1	Evoluta ed evolvente	25
2.1.1	Equazione vettoriale	26
2.1.2	Proprietà dell'evoluta	26
2.1.3	Equazioni parametriche	27
2.2	Inviluppo	30
3	Curve nello spazio	37
3.1	Da \mathbb{E}^2 a \mathbb{E}^3	37
3.2	Il triedro di Frenet: curvatura e torsione	38
3.2.1	Calcolo di $k(s)$ e $t(s)$ con la parametrizzazione naturale	41
3.2.2	Calcolo di $k(s)$ e $t(s)$ con parametrizzazione arbitraria	42
3.3	Teorema fondamentale di Bonnet (nello spazio)	48
3.4	Equazioni canoniche	49

II	Geometria locale delle superfici in \mathbb{E}^3	53
4	Introduzione	55
4.1	Tratti generali	55
4.2	Analisi introduttiva	56
4.2.1	Superfici e parametrizzazioni	56
4.2.2	Piano tangente e base naturale	57
4.2.3	Composizione	58
4.2.4	Indipendenza del piano tangente dalla parametrizzazione	59
5	Prima forma fondamentale	61
5.1	Definizione	61
5.2	Applicazioni	62
5.2.1	Velocità	62
5.2.2	Distanza	63
5.2.3	Area	64
6	Curvatura e seconda forma	69
6.1	Metodo euleriano: curvatura normale e curvatura gaussiana	69
6.2	Seconda forma fondamentale	72
6.2.1	Calcolo dei coefficienti di II in notazione scalare	75
6.2.2	Curvatura normale per parametrizzazione arbitraria	77
6.2.3	Calcolo della curvatura gaussiana	81
6.2.4	Curvatura media	84
6.2.5	Calcolo delle curvature principali	85
6.2.6	Proprietà di invarianza	86
6.3	Metodo gaussiano: operatore di forma	87
6.3.1	Mappa di Gauss	87
6.3.2	Operatore di forma	89
6.4	Metodo tayloriano	94
6.5	Cenno alla terza forma	99
III	Geometria intrinseca delle superfici	101
7	Introduzione	103
7.1	Estrinsecità e intrinsecità	103
8	Condizioni di compatibilità	105
8.1	Condizioni di Gauss-Mainardi-Codazzi	105
8.2	Equazioni di Gauss-Weingarten	106
8.2.1	Analogia: rotore	111

<i>INDICE</i>	197
9 Il Theorema Egregium	115
9.1 Tensore di Riemann	115
9.1.1 Struttura delle condizioni di risolubilità	115
9.1.2 Significato del tensore di Riemann	117
9.2 Calcolo dei coefficienti di Gauss-Weingarten	118
9.2.1 Tavola riassuntiva	128
9.3 Dimostrazione del Theorema Egregium	128
9.3.1 Formula di Brioschi	130
9.4 Perché “tensore”?	139
9.4.1 Il problema delle parametrizzazioni	139
9.4.2 A cosa serve il calcolo tensoriale?	146
9.4.3 Interpretazione moderna	148
IV Parallelismo superficiale e geodetiche	151
10 Parallelismo	153
10.1 Dal caso piano al caso generale	153
10.1.1 Caso piano	153
10.1.2 Caso generale: derivata covariante	154
10.2 Procedimenti di derivazione	158
10.2.1 Assiomi di Koszul	158
10.2.2 Derivazione covariante alla Koszul	160
10.2.3 Derivazione covariante alla Levi-Civita	161
10.3 Parallelismo	162
10.3.1 Definizione	162
10.3.2 Trasporto per parallelismo	162
10.4 Dipendenza del trasporto dalla curva	166
10.4.1 Condizione di teleparallelismo	167
11 Geodetiche	171
11.1 Definizioni e esempi	171
11.2 Geodetiche come moti inerziali	172
11.2.1 Conseguenze	173
11.2.2 Geodetiche e parallelismo	174
11.3 Geodetiche come curve di curvatura nulla	175
11.3.1 Curvatura geodetica	175
11.4 Geodetiche come curve di minima lunghezza	178
11.4.1 Equazioni di Lagrange	179

12 Il Teorema di Gauss-Bonnet	185
12.1 Curve regolari	185
12.2 Estensione: curve con punti angolosi	190

Bibliografia

- [1] John Oprea, *Differential Geometry and its Applications*, Prentice Hall, 1996
- [2] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, seconda edizione, Academic Press, New York, 1997
- [3] H. Guggenheimer, *Differential Geometry*, Dover, 1997
- [4] W. Kühnel, *Differential Geometry: curves - surfaces - manifolds*, American Mathematical Society, 2002