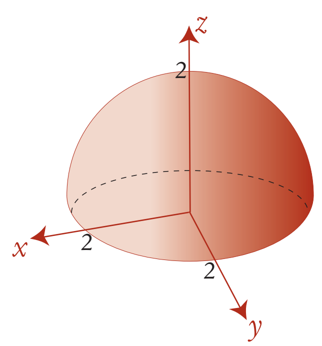
2. Le funzioni continue

Ripercorriamo – per le funzioni di due variabili – l'itinerario che, nei precedenti capitoli, abbiamo effettuato per le funzioni di una variabile: la caratterizzazione delle funzioni continue, di quelle derivabili, il calcolo delle derivate, la ricerca dei punti di massimo e di minimo ecc.

DEFINIZIONE - Chiamiamo funzione reale di due variabili reali $z = f(x, y)$ una qualunque corrispondenza univoca:

$$f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

che a ogni punto (x, y) dell'insieme di definizione A associa un unico valore $z \in \mathbf{R}$.



Esempio

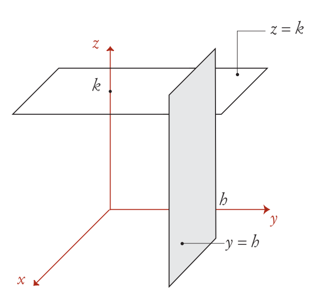
Consideriamo la funzione $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ che, per esempio, a (0, 0) associa 2; a (1, 0) associa $\sqrt{3}$ ecc.
L'insieme di definizione di questa funzione è dato dai punti (x, y) per cui risulta $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, ovvero $x^2 - y^2 \leq 4$. In questo caso, l'insieme di definizione è il sottoinsieme A di $\mathbf{R}^2$ costituito dai punti interni alla circonferenza di centro (0, 0) e raggio $r = 2$ e dagli stessi punti della circonferenza.

Esempio

La funzione di produzione di Cobb-Douglas

$$z = cL^{1-a}K^a$$

(c e a costanti reali, con $c > 0$ e $0 < a < 1$) assegna la quantità del prodotto z quando sono noti il lavoro L e il capitale K impiegati. Se si fa ricorso a questo modello, la produzione è dunque considerata dipendente da due fattori. La funzione di Cobb-Douglas associa a ogni coppia di numeri reali non negativi (L, K) il numero reale non negativo z; il suo insieme di esistenza è dunque costituito dai punti del primo quadrante.



I piani $z = k$ (orizzontale) e $y = b$ (verticale).

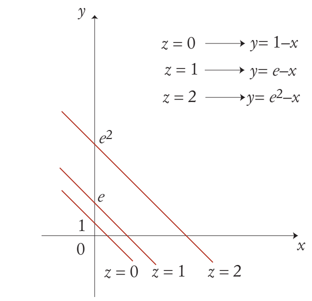
Il grafico di una funzione di *una* variabile $y = f(x)$ era costituito dai punti di una curva nel piano, ovvero da quei punti (x, y) per i quali risultava $y = f(x)$ (y era l'immagine associata a x nella corrispondenza f).

In modo simile, il grafico di una funzione $z = f(x, y)$ viene definito come l'insieme dei punti (x, y, z) di quella superficie nello spazio tridimensionale per cui risulta $z = f(x, y)$.

Se il grafico di una funzione di due variabili $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ (e viene dunque rappresentato da una superficie nello spazio), è chiaro che non potremo mai disegnare i grafici delle funzioni di 3, 4, … , n variabili: avremmo bisogno di uno spazio a 4, 5, … , $n + 1$ dimensioni!

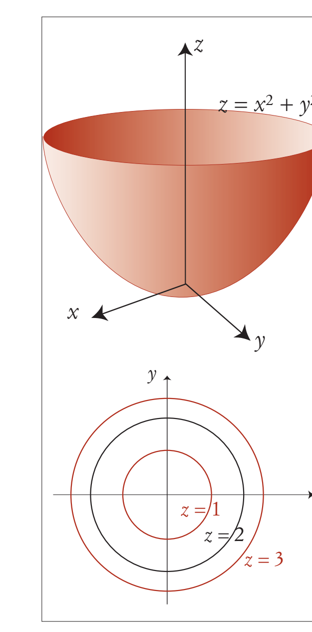
Le curve di livello

Anche per le funzioni di due variabili, tracciare il grafico non è comunque agevole. L'ostacolo può in qualche misura essere superato ricorrendo alle *curve di livello*, ovvero a quelle linee che nel piano uniscono tutti e soli i punti (x, y) che hanno la stessa quota z.



Consideriamo, per esempio, la funzione $z = \log(x + y)$. La curva di livello 0 è formata dai punti (x, y) per cui è $\log(x + y) = 0$, ovvero dalla retta di equazione $x + y = 1$; la curva di livello 1 è formata dai punti (x, y) per cui è $\log(x + y) = 1$, ovvero dalla retta di equazione $x + y = e$; e così via.

Le curve di livello individuano i punti del piano che, sulla superficie $z = f(x, y)$, hanno la stessa quota (o livello). Costituiscono un efficace modo per rappresentare nel piano una situazione tridimensionale, soprattutto se si ha la cura di disegnare curve di livello che si riferiscono a valori di z scelti con una certa regolarità (per esempio, $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ ecc.): allora, dalla maggiore o minore vicinanza delle curve di livello, si può dedurre la maggiore o minor pendenza della superficie di equazione $z = f(x, y)$. Per esempio, dalle curve di livello della funzione $z = \log(x + y)$ e dal loro "diradarsi", si deduce che la funzione in questione cresce con una certa fatica.



Esempio

Consideriamo il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Le sue curve di livello sono circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = c$. Nel disegno sottostante sono rappresentate le curve di livello per $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$; il loro infittirsi evidenzia come la superficie cresce con una notevole pendenza.

Le curve di livello vengono usate nei più svariati contesti. In meteorologia, per esempio, considerata la funzione $T(x, y)$ che indica la temperatura T per ogni punto (x, y), vengono chiamate *isoterme* e congiungono i luoghi che hanno avuto (o si prevede che avranno) la stessa temperatura.

Isoquanti e curve di indifferenza

In Economia sono utilizzate per le funzioni di produzione e di quelle di utilità. Nel primo caso, le curve di livello prendono il nome di *isoquanti* e individuano i fattori produttivi che permettono di ottenere la stessa quantità di prodotto. Per le funzioni di utilità, le curve di livello sono chiamate *curve di indifferenza* e raccolgono i panieri di beni che ricevono dal consumatore lo stesso gradimento.

La definizione di continuità

La definizione di continuità, per funzioni di due variabili, è formalmente simile a quella vista a p. 126 per funzioni di una sola variabile.