Esercizi svolti

1 Numeri complessi

1.1 Forma cartesiana

Esercizio 1.1 *Dato il numero complesso*

$$z = -4\sqrt{3} - 4\mathbf{i},$$

a) determinare la parte reale x di z: $x = \mathfrak{Re}\, z$,

b) determinare la parte immaginaria y di z: $y = \mathfrak{Im}\, z$,

c) determinare il modulo r di z: $r = |z|$,

d) determinare l'argomento ϑ di z: $\vartheta = \arg z$,

e) scrivere z in forma polare trigonometrica e in forma esponenziale,

f) determinare il complesso coniugato $\bar{z}$ di z.

Soluzione

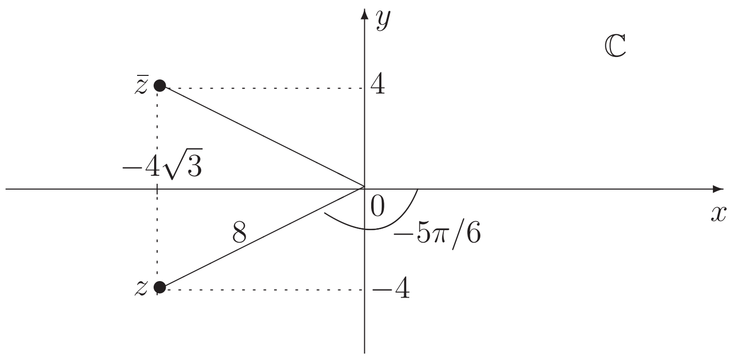

Figura 1: Esercizio 1.1.

a) $x = \mathfrak{Re}\, z = -4\sqrt{3}$,

b) $y = \mathfrak{Im}\, z = -4$,

c) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$,

d) $\tan\vartheta = \dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \dfrac{-4/8}{-4\sqrt{3}/8} = \dfrac{-1/2}{-\sqrt{3}/2}$ e dunque $\vartheta = \arg z = -5\pi/6$,

e) $z = 8\,(\cos(-5\pi/6) + \mathbf{i}\sin(-5\pi/6)) = 8\,(\cos(5\pi/6) - \mathbf{i}\sin(5\pi/6))$

$z = 8\,\mathrm{e}^{-5\mathbf{i}\pi/6}$,

f) $\bar{z} = -4\sqrt{3} + 4\mathbf{i} = 8\,(\cos(5\pi/6) + \mathbf{i}\sin(5\pi/6)) = 8\,\mathrm{e}^{5\mathbf{i}\pi/6}$.

Esercizio 1.2 *Dato il numero complesso*

$$z = 9 - 9\sqrt{3}\ \mathbf{i},$$

a) determinare la parte reale x di z: $x = \mathfrak{Re}\, z$,

b) determinare la parte immaginaria y di z: $y = \mathfrak{Im}\, z$,

c) determinare il modulo r di z: $r = |z|$,

d) determinare l'argomento ϑ di z: $\vartheta = \arg z$,

e) scrivere z in forma polare trigonometrica e in forma esponenziale,

f) determinare il complesso coniugato $\bar{z}$ di z.

Soluzione

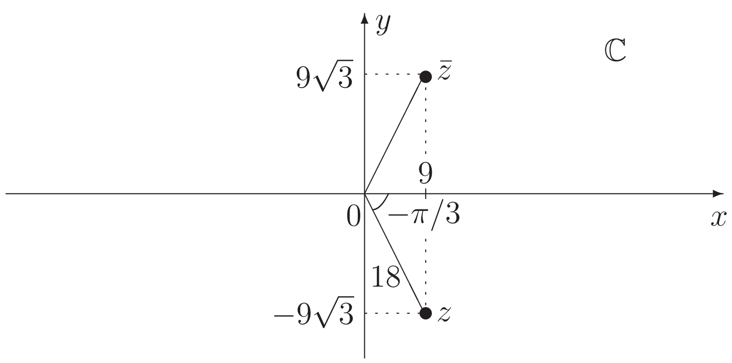

Figura 2: Esercizio 1.2.

a) $x = \mathfrak{Re}\, z = 9$,

b) $y = \mathfrak{Im}\, z = -9\sqrt{3}$,

c) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9^2 + (-9\sqrt{3})^2} = \sqrt{324} = 18$,

d) $\tan\vartheta = \dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \dfrac{-9\sqrt{3}/18}{9/18} = \dfrac{-\sqrt{3}/2}{1/2}$ e dunque $\vartheta = \arg z = -\pi/3$,

e) $z = 18\,(\cos(-\pi/3) + \mathbf{i}\sin(-\pi/3)) = 18\,(\cos(\pi/3) - \mathbf{i}\sin(\pi/3))$

$z = 18\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/3}$,

f) $\bar{z} = 9 + 9\mathbf{i}\sqrt{3} = 18\,(\cos(\pi/3) + \mathbf{i}\sin(\pi/3)) = 18\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi/3}$.

Esercizio 1.3 *Dati i numeri complessi*

$$z = 3\sqrt{3} - 3\mathbf{i} \qquad e \qquad w = -1 - \sqrt{3}\mathbf{i}$$

a) Scivere in forma cartesiana la somma di z e di w,

b) Scivere in forma cartesiana il prodotto di z e di w,

c) Scivere in forma cartesiana z diviso w,

d) Calcolare modulo e argomento di $z \cdot w$,

e) Calcolare modulo e argomento di z/w.

Soluzione

a) $z + w = (3\sqrt{3} - 3\mathbf{i}) + (-1 - \sqrt{3}\mathbf{i}) = (3\sqrt{3} - 1) + \mathbf{i}(-3 - \sqrt{3})$,
si osservi che
$z = w \cdot 3\mathbf{i}$
e poiché la moltiplicazione per $\mathbf{i}$ provoca una rotazione di $\pi/2$ si ha che i due vettori $(3\sqrt{3}, -3)$ e $(-1, -\sqrt{3})$ sono ortogonali,

b) $z \cdot w = (3\sqrt{3} - 3\mathbf{i}) \cdot (-1 - \sqrt{3}\mathbf{i}) = (-3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) + \mathbf{i}(3 - 9) = -6\sqrt{3} - 6\mathbf{i}$,

c) $z/w = (3\sqrt{3} - 3\mathbf{i})/(-1 - \sqrt{3}\mathbf{i})$ e quindi:

$$\frac{z}{w} = \frac{(3\sqrt{3} - 3\mathbf{i}) \cdot (-1 + \sqrt{3}\mathbf{i})}{(-1 - \sqrt{3}\mathbf{i}) \cdot (-1 + \sqrt{3}\mathbf{i})} = \frac{12\mathbf{i}}{3 + 1} = 3\mathbf{i},$$

d) da $z \cdot w = -6\sqrt{3} - 6\mathbf{i}$, mettendo in evidenza 12 si ha: $c \cdot w = 12(-\sqrt{3}/2 - \mathbf{i}/2)$ e questo mette in rilievo che $|z \cdot w| = 12$ e $\arg(z \cdot w) = 7\pi/6$,

e) da $z/w = 3\mathbf{i}$ si ottiene subito che: $|z/w| = 3$ e $\arg(z/w) = \pi/2$.

Esercizio 1.4 *Risolvere in campo complesso l'equazione:*

$$z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

Soluzione Poniamo $z = x + \mathbf{i}y$ e si ha:

$$(x + \mathbf{i}y)^2 - 2(x - \mathbf{i}y) + 1 = 0,$$

da cui si ricava:

$$x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy - 2x + 2\mathbf{i}y + 1 = 0$$

e separando parte reale e parte immaginaria si ha:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo due casi:

1) $y = 0,$

2) $y \neq 0.$

Nel caso 2) si può semplificare y e si ha $x = -1$ e mettendo questi risultati nella prima equazione si ottiene rispettivamente:

1) $x^2 - 2x + 1 = 0,$

2) $1 - y^2 + 2 + 1 = 0,$

e perciò ne segue:

1) $x = 1,$

2) $y = \pm 2,$

e in definitiva le soluzioni della equazione proposta sono:

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -1 + 2\mathbf{i} \\ z_3 = -1 - 2\mathbf{i}. \end{cases}$$

Osservazione

Il sistema (1) rappresenta nel piano (x, y) l'intersezione di due coniche degeneri. La prima conica è data dalle due rette $y = (x-1)$ e $y = -(x-1)$, mentre la seconda è data dalla retta verticale $x = -1$ e dalla retta orizzontale $y = 0$.

Esercizio 1.5 *Risolvere in campo complesso l'equazione:*

$$z^2 - \frac{1}{4}(z - \overline{z})^2 - 4 = 8\mathrm{i}.$$

Soluzione Poniamo $z = x + \mathbf{i}y$ e si ha:

$$(x + \mathbf{i}y)^2 - (1/4)(x + \mathbf{i}y - x + \mathbf{i}y)^2 - 4 = 8\mathbf{i},$$

da cui si ricava:

$$x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy - (1/4)(2\mathbf{i}y)^2 - 4 = 8\mathbf{i}$$

ovvero:

$$x^2 - y^2 + 2\mathbf{i}xy + y^2 - 4 = 8\mathbf{i}$$

e separando parte reale e parte immaginaria si ha:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ 2xy = 8. \end{cases} \tag{2}$$

Dalla prima equazione ricaviamo due casi:

1) $x = 2$,

2) $x = -2$.

Mettendo questi risultati nella seconda equazione si ottiene rispettivamente:

1) $4y = 8$,

2) $-4y = 8$,

e perciò ne segue:

1) $y = 2$,

2) $y = -2$,

e in definitiva le soluzioni della equazione proposta sono:

$$\begin{cases} z_1 = 2 + 2\mathbf{i} \\ z_2 = -2 - 2\mathbf{i}. \end{cases}$$

Osservazione

Il sistema (2) rappresenta nel piano (x, y) l'intersezione tra una conica degenere e una conica. La prima conica è data dalle due rette verticali $x = -2$ e $x = 2$, mentre la seconda è data dalla iperbole $y = 4/x$.

1.2 Forma polare trigonometrica

Esercizio 1.6 *Dato il numero complesso*

$$z = -8\mathbf{i},$$

a) *determinare il modulo r di z: $r = |z|$,*

b) *determinare l'argomento ϑ di z: $\vartheta = \arg z$,*

c) *scrivere z in forma polare trigonometrica,*

d) *scrivere, in forma polare trigonometrica, il complesso coniugato $\bar{z}$ di z,*

e) *calcolare z^5,*

f) *calcolare $\sqrt[3]{z}$.*

Soluzione

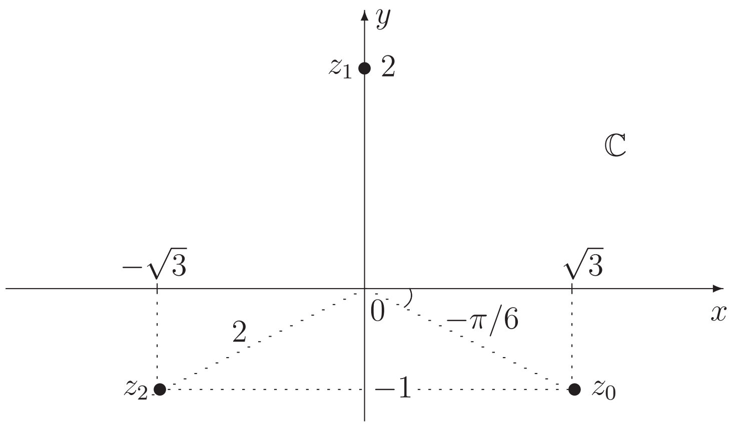

Figura 3: Esercizio 1.6.

a) $r = |z| = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8$,

b) essendo la parte reale del numero complesso z nulla, il suo argomento sarà $\pm\pi/2$ ed essendo la parte immaginaria di z negativa si avrà:

$$\vartheta = \arg z = -\pi/2,$$

c) $z = 8\,(\cos(-\pi/2) + \mathbf{i}\sin(-\pi/2)) = 8\,(\cos(\pi/2) - \mathbf{i}\sin(\pi/2))$,

d) $\bar{z} = 8\,(\cos(\pi/2) + \mathbf{i}\sin(\pi/2))$,

e) $z^5 = \left(8\,(\cos(-\pi/2) + \mathbf{i}\sin(-\pi/2))\right)^5 =$
$= 8^5(\cos(-5\pi/2) + \mathbf{i}\sin(-5\pi/2)) = 2^{15}(-\mathbf{i}\sin(5\pi/2)) = -32768\ \mathbf{i}$,

f) $\sqrt[3]{z} = \left(8\,(\cos(-\pi/2 +\ k\,2\pi) + \mathbf{i}\sin(-\pi/2 +\ k\,2\pi))\right)^{1/3} =$
$= 8^{1/3}\,(\cos(-\pi/6 +\ k\,2\pi/3) + \mathbf{i}\sin(-\pi/6 +\ k\,2\pi/3))$,

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt{3} - \mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} \\ -\sqrt{3} - \mathbf{i}. \end{cases}$$

Nella figura 3 si è posto $z_0 = \sqrt{3} - \mathbf{i}$ ottenuto per $k = 0$, $z_1 = 2\mathbf{i}$ ottenuto per $k = 1$ e $z_2 = -\sqrt{3} - \mathbf{i}$ ottenuto per $k = 2$.

Esercizio 1.7 *Dato il numero complesso*

$$z = 64,$$

a) determinare il modulo r di z: $r = |z|$,

b) determinare l'argomento ϑ di z: $\vartheta = \arg z$,

c) scrivere z in forma polare trigonometrica,

d) calcolare le radici seste complesse di z: $\sqrt[6]{z}$.

Soluzione

a) $r = |z| = \sqrt{64^2 + 0^2} = 64$,

b) essendo la parte immaginaria del numero complesso z nulla, il suo argomento sarà 0 oppure $\pm\pi$ ed essendo la parte reale di z positiva si avrà:

$$\vartheta = \arg z = 0,$$

c) $z = 64\,(\cos 0 + \mathbf{i}\sin 0)$,

d) $\sqrt[6]{z} = \left(64\,(\cos(0 +\ k\,2\pi) + \mathbf{i}\sin(0 +\ k\,2\pi))\right)^{1/6} =$
$= 64^{1/6}\,(\cos(k\,2\pi/6) + \mathbf{i}\sin(k\,2\pi/6))$,

$$\sqrt[6]{z} = \begin{cases} 2 \\ 1 + \mathbf{i}\sqrt{3} \\ -1 + \mathbf{i}\sqrt{3} \\ -2 \\ -1 - \mathbf{i}\sqrt{3} \\ 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}. \end{cases}$$

Nella figura 4 si è posto $z_0 = 2$ ottenuto per $k = 0$, $z_1 = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ ottenuto per $k = 1$, $z_2 = -1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ ottenuto per $k = 2$, $z_3 = -2$ ottenuto per $k = 3$, $z_4 = -1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$ ottenuto per $k = 4$ e $z_5 = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$ ottenuto per $k = 5$.

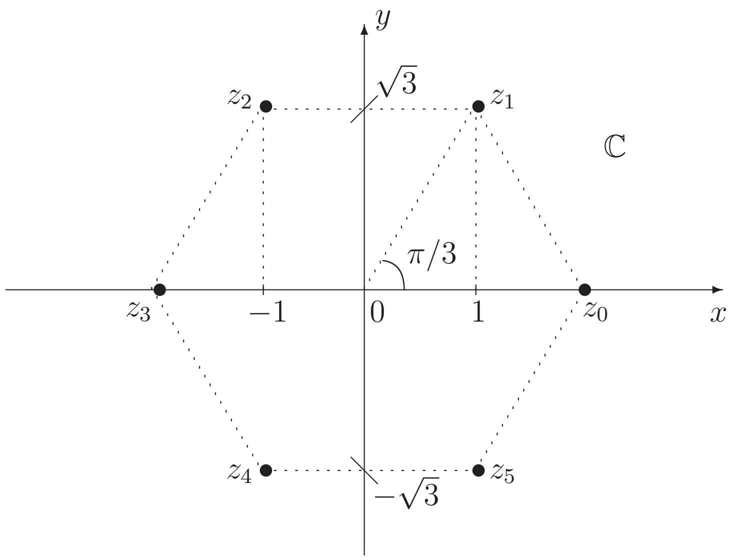

Figura 4: Esercizio 1.7.

Esercizio 1.8 *Dato il numero complesso*

$$z = -81,$$

a) determinare il modulo r di z: $r = |z|$,

b) determinare l'argomento ϑ di z: $\vartheta = \arg z$,

c) scrivere z in forma polare trigonometrica,

d) calcolare le radici quarte complesse di z: $\sqrt[4]{z}$.

Soluzione

a) $r = |z| = \sqrt{0^2 + (-81)^2} = 81$,

b) essendo la parte immaginaria del numero complesso z nulla, il suo argomento sarà 0 oppure $\pm\pi$ ed essendo la parte reale di z negativa si avrà:

$$\vartheta = \arg z = \pi,$$

c) $z = 81\,(\cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi)$,

d) $\sqrt[4]{z} = (81\,(\cos(\pi + \ k\,2\pi) + \mathbf{i}\sin(\pi + \ k\,2\pi)))^{1/4} =$
$= 81^{1/4}\,(\cos(\pi/4 + k\,2\pi/4) + \mathbf{i}\sin(\pi/4 + k\,2\pi/4))$,

$$\sqrt[4]{z} = \begin{cases} 3\sqrt{2}/2 + 3\mathbf{i}\sqrt{2}/2 \\ -3\sqrt{2}/2 + 3\mathbf{i}\sqrt{2}/2 \\ -3\sqrt{2}/2 - 3\mathbf{i}\sqrt{2}/2 \\ 3\sqrt{2}/2 - 3\mathbf{i}\sqrt{2}/2. \end{cases}$$

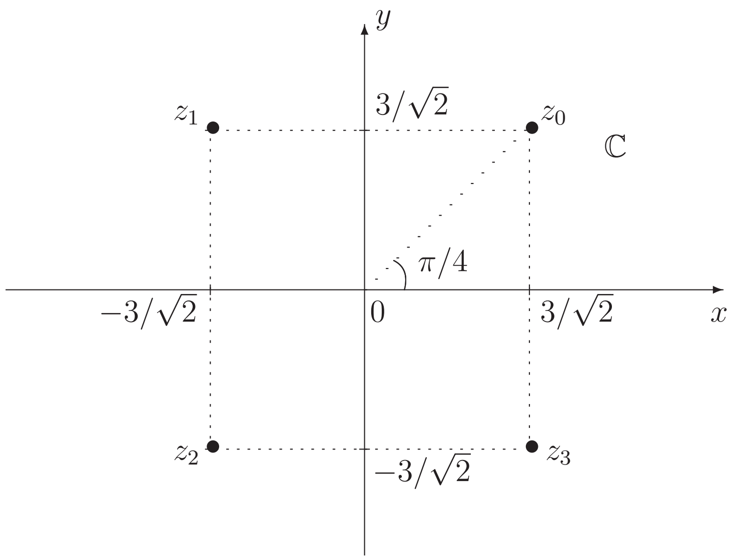

Figura 5: Esercizio 1.8.

Nella figura 5 si è posto $z_0 = 3\sqrt{2}/2 + 3\mathbf{i}\sqrt{2}/2$ ottenuto per $k = 0$, $z_1 = -3\sqrt{2}/2 + 3\mathbf{i}\sqrt{2}/2$ ottenuto per $k = 1$, $z_2 = -3\sqrt{2}/2 - 3\mathbf{i}\sqrt{2}/2$ ottenuto per $k = 2$ e $z_3 = 3\sqrt{2}/2 - 3\mathbf{i}\sqrt{2}/2$ ottenuto per $k = 3$.

Esercizio 1.9 *Calcolare modulo e aromento del seguente numero complesso:*

$$z = \frac{5 - 5\mathbf{i}}{5 + 5\sqrt{3}\ \mathbf{i}} \left(\cos(5\pi/12) + \mathbf{i}\sin(5\pi/12)\right)$$

e scriverlo in forma polare trigonometrica.

Soluzione

Per le proprietà del modulo si ha:

$$|z| = \frac{|5 - 5\mathbf{i}|}{|5 + 5\sqrt{3}\ \mathbf{i}|} \left|(\cos(5\pi/12) + \mathbf{i}\sin(5\pi/12))\right| == \frac{5\sqrt{2}}{10} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

inoltre per le proprietà dell'argomento si ha:

$$\begin{aligned} \arg z &= \arg(5 - 5\mathbf{i}) - \arg(5 + 5\sqrt{3}\ \mathbf{i}) + \arg\left(\cos(5\pi/12) + \mathbf{i}\sin(5\pi/12)\right) = \\ &= -\pi/4 - \pi/3 + 5\pi/12 = -\pi/6. \end{aligned}$$

Si ha in conclusione:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos(-\pi/6) + \mathbf{i}\sin(-\pi/6)\right).$$

Esercizio 1.10 *Calcolare modulo e aromento del seguente numero complesso:*

$$z = \frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$$

e scriverlo in forma polare trigonometrica.

Soluzione

Per le proprietà del modulo si ha:

$$|z| = \frac{|1 + \mathbf{i}|}{|1 - \mathbf{i}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1,$$

inoltre per le proprietà dell'argomento si ha:

$$\begin{aligned} \arg z &= \arg(1 + \mathbf{i}) - \arg(1 - \mathbf{i}) = \\ &= \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2. \end{aligned}$$

Si ha in conclusione:

$$z = (\cos(\pi/2) + \mathbf{i}\sin(\pi/2)) = \mathbf{i}.$$

Esercizio 1.11 *Calcolare modulo e aromento del seguente numero complesso:*

$$z = \frac{-3}{2\mathbf{i}}\left(-4(\cos(\pi/8) + \mathbf{i}\sin(\pi/8)\right)$$

e scriverlo in forma polare trigonometrica.

Soluzione

Per le proprietà del modulo si ha:

$$|z| = \frac{|-3|}{|2\mathbf{i}|} \cdot |-1| \cdot |(4(\cos(\pi/8) + \mathbf{i}\sin(\pi/8)))| = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 6$$

inoltre per le proprietà dell'argomento si ha:

$$\begin{aligned} \arg z &= \arg(-3) - \arg(2\mathbf{i}) + \arg(-1) + \arg\left(4(\cos(\pi/8) + \mathbf{i}\sin(\pi/8)\right) = \\ &= \pi - (\pi/2) + \pi + \pi/8 = -3\pi/8. \end{aligned}$$

Si ha in conclusione:

$$z = 6\left(\cos(-3\pi/8) + \mathbf{i}\sin(-3\pi/8)\right).$$

1.3 Forma esponenziale

Esercizio 1.12 *Dato il seguente numero complesso:*

$$z = -12\sqrt{3} + 12\mathbf{i}$$

calcolare modulo, argomento, parte reale e parte immaginaria di z. Scrivere z in forma esponenziale.

Soluzione Si ha:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(-12\sqrt{3})^2 + 12^2} = 24 \\
\arg z &= \arctan\left(\frac{12}{-12\sqrt{3}} + \pi\right) = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6 \\
\mathfrak{Re} z &= 24\cos(5\pi/6) = -12\sqrt{3} \\
\mathfrak{Im} z &= 24\sin(5\pi/6) = 12.
\end{aligned}$$

Da quanto si è calcolato si ricava:

$$z = 24\,\mathrm{e}^{5\mathbf{i}\pi/6}.$$

Esercizio 1.13 *Dato il seguente numero complesso:*

$$z = 3 - 3\mathbf{i}$$

calcolare modulo, argomento di z e scrivere z in forma esponenziale. Calcolare poi la terza potenza di z.

Soluzione Si ha:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \\
\arg z &= \arctan\left(\frac{-3}{3}\right) = -\pi/4.
\end{aligned}$$

Da quanto si è calcolato si ricava:

$$z = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/4},$$

e quindi:

$$z^3 = \left(3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/4}\right)^3 = 54\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-3\mathbf{i}\pi/4} = -54 - 54\mathbf{i}.$$

Esercizio 1.14 *Dato il seguente numero complesso:*

$$z = -16\sqrt{3} - 16\mathbf{i}$$

calcolare modulo, argomento di z e scrivere z in forma esponenziale. Calcolare poi la radice quinta di z.

Soluzione Si ha:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(-16\sqrt{3})^2 + (-16)^2} = 32 \\ \arg z &= \arctan\left(\frac{-16}{-16\sqrt{3}}\right) - \pi = \pi/6 - \pi = -5\pi/6. \end{aligned}$$

Da quanto si è calcolato si ricava:

$$z = 32\,\mathrm{e}^{-5\mathbf{i}\pi/6},$$

e quindi:

$$z^{1/5} = \left(32\,\mathrm{e}^{-5\mathbf{i}\pi/6 + k\,2\pi\,\mathbf{i}}\right)^{1/5} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/6 + k\,2\pi\,\mathbf{i}/5},$$

con k intero relativo. Dunque si ha:

$$z^{1/5} = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/6} & \\ 2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/6 + 2\pi\,\mathbf{i}/5} & = \; 2\,\mathrm{e}^{7\mathbf{i}\pi/30} \\ 2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/6 + 2\cdot 2\pi\,\mathbf{i}/5} & = \; 2\,\mathrm{e}^{19\mathbf{i}\pi/30} \\ 2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/6 + 3\cdot 2\pi\,\mathbf{i}/5} & = \; 2\,\mathrm{e}^{31\mathbf{i}\pi/30} \\ 2\,\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi/6 + 4\cdot 2\pi\,\mathbf{i}/5} & = \; 2\,\mathrm{e}^{43\mathbf{i}\pi/30} \end{cases}$$

Esercizio 1.15 *Dato il seguente numero complesso:*

$$z = \mathrm{e}^2/2 + \mathrm{e}^2\mathbf{i}\sqrt{3}/2$$

calcolare modulo, argomento di z e scrivere z in forma esponenziale. Calcolare poi il logaritmo complesso di z.

Soluzione Si ha:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\mathrm{e}^2/2)^2 + (\mathrm{e}^2\sqrt{3}/2)^2} = \mathrm{e}^2 \\ \arg z &= \arctan\left(\frac{\mathrm{e}^2\sqrt{3}/2}{\mathrm{e}^2/2}\right) = \pi/3. \end{aligned}$$

Da quanto si è calcolato si ricava:

$$z = \mathrm{e}^{2+\mathbf{i}\pi/3},$$

e quindi:

$$\log z = \log\left(\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi/3 + 2k\pi\,\mathbf{i}}\right) = \log \mathrm{e}^2 + \log \mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi/3 + 2k\pi\,\mathbf{i}} = 2 + \mathbf{i}\pi/3 + 2k\pi\,\mathbf{i},$$

con k intero relativo.