

Il modello preda-predatore con Octave

Andrea Centomo

Liceo "F. Corradini" di Thiene (VI)

Email: andrea.centomo@istruzione.it

26 agosto 2006

In queste pagine risolviamo, con il software libero GNU Octave, un problema classico di dinamica di popolazione. Quanto segue può essere direttamente utilizzato nella didattica della Matematica nella scuola secondaria di II grado.

1. Il Modello

Indicati rispettivamente con v_k e c_k il numero di volpi e di conigli presenti in una regione un fissato anno k , supponiamo che le popolazioni di questi animali evolvano secondo il seguente modello:

$$\begin{aligned}v_{k+1} &= +\frac{1}{2}v_k + \frac{1}{100}c_k \\c_{k+1} &= -\frac{25}{2}v_k + \frac{5}{4}c_k\end{aligned}$$

Osserviamo che:

- il numero di volpi nell'anno *successivo* all'anno k sono $v_k/2$ (nella regione molte volpi vengono uccise dall'uomo per ricavare pelli) più $1/100$ del numero dei conigli di cui le volpi si nutrono;
- il numero di conigli nell'anno *successivo* all'anno k sono $5c_k/4$ (i conigli si riproducono) meno $25/2$ del numero di volpi (parte dei conigli è divorata dalle volpi).

Dal momento che siamo interessati alla matematica del problema tralasciamo la discussione non banale riguardante la scelta dei coefficienti e la validità del modello; questo ultimo aspetto dovrebbe scaturire da un confronto con dei dati empirici che non abbiamo a disposizione.

Sapendo che nell'anno $k=0$ il numero di volpi e conigli è:

$$\begin{aligned}v_0 &= 50 \\c_0 &= 1600\end{aligned}$$

vogliamo rispondere alle seguenti domande

1. quante volpi e quanti conigli ci sono dopo 20 anni?
2. è possibile rappresentare graficamente l'andamento del numero delle volpi fino all'anno 20?

Una volta trovata una risposta quantitativa al primo quesito potremmo discutere problemi di carattere ecologico come il pericolo di estinzione di una specie, la sua eccessiva proliferazione e via di seguito.

Per rispondere osserviamo in primo luogo che la legge che rappresenta l'evoluzione delle popolazioni si può riscrivere, utilizzando il concetto di prodotto di matrici, in questo modo:

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{100} \\ -\frac{25}{2} & +\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ c_k \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

dove con M abbiamo indicato la matrice 2×2 che definisce l'evoluzione dinamica della popolazione. Osservato questo non è difficile comprendere che la popolazione delle due specie si ottiene calcolando

$$\begin{pmatrix} v_{20} \\ c_{20} \end{pmatrix} = M^{20} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

Da un punto di vista concettuale, una volta noto il concetto di prodotto di matrici, non vi è alcuna difficoltà nel rispondere alla prima domanda. Da un punto di vista del calcolo manuale il discorso è diverso, in quanto il calcolo di M^{20} è molto laborioso. Vediamo allora come l'ambiente Octave possa aiutarci a questo scopo.

2. Calcolo matriciale con Octave

```
octave:1> M = [ 1/2 1/100 ; -25/2 5/4 ]
```

```
M =
```

```
  0.500000  0.010000
```

```
-12.500000  1.250000
```

```
octave:2> P0 = [50 ; 1600]
```

```
P0 =
```

```
  50
```

```
1600
```

```
octave:3> P20 = M^20*P0
```

```
P20 =
```

```
 14.114
```

```
702.854
```

Dunque avremo: $v_{20} \approx 14$ e $c_{20} \approx 703$. L'esempio precedente evidenzia diversi aspetti:

1. l'inserimento di una matrice avviene scrivendo le sue componenti tra parentesi quadrate; le righe sono separate da un punto e virgola;
2. i simboli delle diverse operazioni algebriche sono piuttosto usuali $*$ per la moltiplicazione, $/$ per la divisione, mentre \wedge indica l'elevamento a potenza.

In Octave sono implementate tutte le principali funzionalità tipiche dell'Algebra Lineare, per le quali si rimanda al Manuale o ad uno dei tanti articoli e tutorial disponibili in rete sull'argomento.

3. Grafici con Octave

Il secondo quesito ha come prerequisito un minimo di conoscenza sulla grafica con Octave. A questo proposito è bene precisare che Octave si appoggia per la grafica ad altri ambienti tra cui Gnuplot. Gnuplot è uno strumento molto versatile, da linea di comando, che permette di tracciare grafici di funzioni 2D e 3D e di dati, contenuti ad esempio in un semplice file di testo. Per tracciare il grafico dell'andamento della popolazione di volpi fino al ventesimo anno possiamo procedere come segue:

```
octave:1> M = [ 1/2 1/100 ; -25/2 5/4 ];
```

```
octave:2> P0 = [ 50 ; 1600 ];
```

```
octave:3> for i = 1:20
```

```
> Pi=M^i*P0;
```

```
> v(i)=Pi(1,1);  
> endfor  
octave:4> k = linspace (0, 20, 21);  
ocatve:5> plot (k,v,*^*)
```

Il risultato è rappresentato dal grafico di Figura 1.

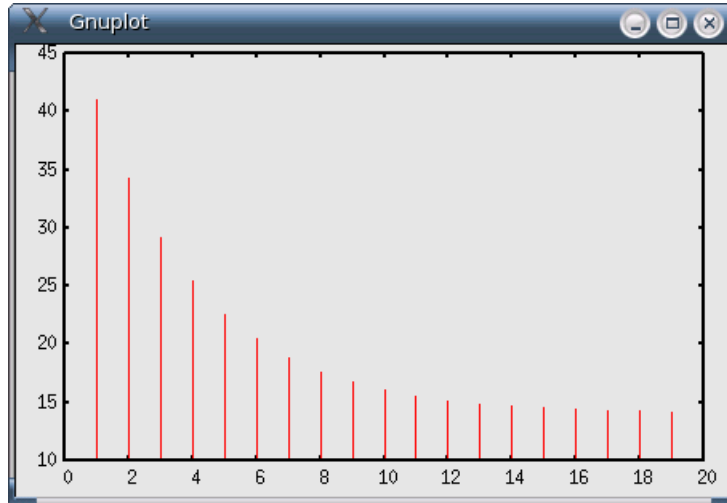


Figura 1. Andamento della popolazione di volpi

L'idea seguita può essere riassunta in questo modo: si costruisce un vettore v di venti componenti che ha per elementi il numero di volpi nei diversi anni, si costruisce un vettore k che contiene i numeri da 1 a 20 e quindi si traccia un grafico in cui le ascisse sono gli elementi di k e le ordinate quelli di v . L'opzione \wedge serve passata a `plot` serve per specificare che si vuole un grafico a impulsi. Naturalmente si possono aggiungere altri parametri per specificare colori, titolo, indicazioni per gli assi e via di seguito.