

Costruiamo uno Zoo Iperbolico!

Andrea Centomo

20 Novembre 2006

Sommario

In questo articolo¹, dopo una breve descrizione del modello iperbolico del semipiano di Poincaré, viene esposto il concetto di *ipoanimale* per la costruzione di uno zoo iperbolico!.

Introduzione

La nascita di geometrie diverse da quella euclidea è ormai lontana nel tempo. Prendiamo l'esempio importante della **Geometria Iperbolica**: già nel 1829 il matematico russo Nikolai Ivanovič Lobačevskij pubblica sulla *Gazzetta di Kazan*, periodico dell'omonima Università, un saggio intitolato *Sui Principi della Geometria* che contiene una esposizione completa di questo nuovo tipo di geometria. Qualche anno più tardi, nel 1832, il matematico ungherese János Bolyai pubblicava risultati del tutto analoghi a quelli di Lobačevskij in appendice ad un saggio del padre Farkas Bolyai.

I lavori dei padri fondatori della Geometria Iperbolica non sono facilmente leggibili e si dovettero attendere diversi anni prima che la geometria iperbolica fosse pienamente accolta dalla comunità scientifica e fossero disponibili sue esposizioni chiare. Il primo passo in questa direzione fu compiuto dal matematico B. Riemann che, con l'introduzione della **Geometria Differenziale**, riuscì a fornire una descrizione metrica della geometria iperbolica. Il punto di vista della geometria differenziale rese agevole la scoperta, fatta dai matematici Beltrami, Cayley, Poincaré e Klein, di **modelli euclidei** della Geometria Iperbolica. Questi modelli, i cui più importanti sono il modello del disco di Beltrami e Poincaré e quello del semipiano superiore, sempre di Poincaré, permettono di introdurre la geometria iperbolica con sufficiente chiarezza ed economia di pensiero. Oltre a questo, attraverso i modelli citati, fu possibile dimostrare l'autoconsistenza della geometria iperbolica permettendo che essa si collocasse ad uno stesso livello di dignità della geometria euclidea.

Nel nostro lavoro, si propone un'introduzione estremamente elementare allo studio di alcuni aspetti fondamentali della Geometria Iperbolica piana. Il modello euclideo che si presta in modo migliore alla divulgazione è il **modello del semipiano di Poincaré**. Per rendere lo studio dell'argomento più piacevole proponiamo in conclusione un'attività ludica che consiste nella costruzione di uno *zoo iperbolico* di animali bidimensionali i cui contorni sono costituiti da poligoni iperbolici.

¹L'articolo è un estratto dell'articolo A. Centomo, Un'incursione nel bestiario Geometrico, Di capre, conigli e altre bestie iperboliche, Lettera Matematica Pristem, n. 45, 2002.

1 Modello del Semipiano di Poincaré

In questo paragrafo descriviamo il modello euclideo del semipiano di Poincaré. Con il termine *modello euclideo* intendiamo la scelta di uno spazio ambiente e di un criterio per definire, in questo spazio, gli oggetti geometrici fondamentali (punto, retta, segmento, ecc...) attraverso oggetti geometrici euclidei.

Nel modello del semipiano superiore lo spazio ambiente \mathbb{H} è un qualsiasi semipiano euclideo delimitato inferiormente da una retta f . Un **punto** del piano iperbolico coincide con un qualsiasi punto euclideo di \mathbb{H} con l'*esclusione* dei punti della retta f . Le **rette** del piano iperbolico (Figura 1) sono di due tipi:

1. semirette euclidee perpendicolari ad f : ottenute intersecando con \mathbb{H} una qualsiasi retta (euclidea) perpendicolare ad f ;
2. semicirconferenze euclidee con centro in f : ottenute intersecando con \mathbb{H} una qualsiasi circonferenza (euclidea) avente centro su f .

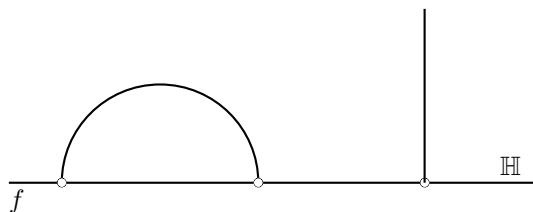


Figura 1: Rette iperboliche

In modo analogo a quanto accade nel piano euclideo, anche nel piano iperbolico si ha che, dati due punti iperbolici distinti P e Q , per essi passa una e una sola retta iperbolica. Per chiarire questo punto consideriamo innanzitutto il caso banale in cui i punti P e Q sono allineati verticalmente. In questo caso la retta iperbolica passante per essi è di tipo 1. e la sua unicità si deduce facilmente dal fatto che la retta euclidea passante per P e per Q è unica. Nel caso in cui i punti P e Q non siano allineati verticalmente la retta che li congiunge è di tipo 2. Per dimostrare che essa è unica possiamo ragionare come segue. Nel piano euclideo consideriamo l'asse h del segmento PQ ed osserviamo che esso è unico. Indichiamo con C il punto di intersezione, a sua volta unico, di h con f e costruiamo la circonferenza euclidea di centro C passante per i punti P e Q . La retta iperbolica passante per P e Q coincide con l'intersezione di questa circonferenza con \mathbb{H} e la sua unicità discende dal fatto che anche la circonferenza trovata è univocamente determinata.

Passiamo ora al concetto di *parallelismo* da cui, come vedremo tra breve, nascono motivi di profonda diversità tra la geometria euclidea ed iperbolica. Iniziamo con la seguente definizione.

Definizione 1 Due rette iperboliche sono **parallele** se non si intersecano in alcun punto.

Due rette iperboliche che non sono parallele si diranno, analogamente a quanto visto in geometria euclidea, rette **incidenti**. Possiamo dimostrare che, diversamente da quanto accade in geometria euclidea, vale il seguente:

Teorema 1 *Data una retta iperbolica r ed un punto P ad essa esterno esistono almeno due rette iperboliche che passano per P e sono parallele ad r .*

Per non appesantire l'esposizione tralasciamo la facile dimostrazione del teorema. Ci limitiamo invece a mostrare un esempio palese di quanto in esso stabilito. Nella Figura 2 le rette iperboliche s e t passano entrambe per il punto P ma non intersecano la retta r . Prima di procedere allo studio dei poligoni iperbolic

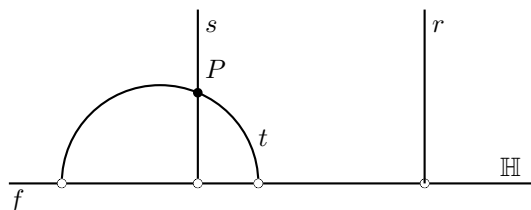


Figura 2: Rette per P parallele ad r

possiamo dare la definizione di *segmento iperbolico*.

Definizione 2 *Dati due punti P e Q su una retta iperbolica r chiamiamo segmento iperbolico l'insieme dei punti di r compresi tra P e Q .*

2 Poligoni

Dopo aver introdotto i concetti di punto e retta possiamo iniziare a studiare i poligoni che hanno per lati segmenti iperbolic. Nella Figura 3 è rappresentato il *triangolo iperbolico* ABC . Di fronte ad esso possono sorgere spontanee domande del tipo:

- a) il triangolo di figura ha due lati uguali?
- b) il triangolo di figura è rettangolo?

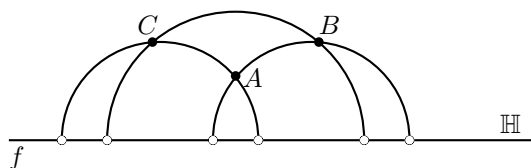


Figura 3: Triangolo iperbolico

Per rispondere alle domande precedenti dobbiamo prima sapere come si misurano lunghezze e angoli in Geometria Iperbolica. Il calcolo delle lunghezze non è completamente banale in quanto richiede il calcolo del logaritmo del birapporto e per esso si rimanda alla bibliografia [1]. Per questa ragione, a livello molto elementare, si deve rinunciare ad introdurre la classificazione dei triangoli e dei poligoni rispetto alla misura dei loro lati. La misura degli angoli nel modello del semipiano è invece abordabile almeno intuitivamente in quanto si procede

in modo analogo a quanto accade nel calcolo dell'angolo tra due curve². In generale, in modo informale, diremo che:

Definizione 3 *La misura dell'angolo di vertice V , che ha per lati due rette iperboliche date, coincide con la misura dell'angolo euclideo formato dalle tangenti euclidee alle rette iperboliche in V .*

Da questa definizione discende che la risposta al quesito b) è negativa in quanto si intuisce che nessun angolo del triangolo dato è retto. Non sarebbe inoltre difficile verificare che la somma degli angoli interni del triangolo di Figura 3 è *minore* di 180° . In realtà si potrebbe dimostrare il seguente teorema, valido in generale:

Teorema 2 *La somma delle misure degli angoli interni di un triangolo iperbolico è sempre strettamente minore di 180° .*

Il teorema non è, come ben noto, valido in geometria euclidea! Prima di procedere suggeriamo il seguente esercizio:

Esercizio 1 *Costruire, nel piano iperbolico, un triangolo rettangolo.*

Passiamo ora all'esplorazione dei quadrilateri iperboliche di cui si ha un esempio in Figura 4. I lati AB e CD del quadrilatero sono paralleli a differenza dei lati

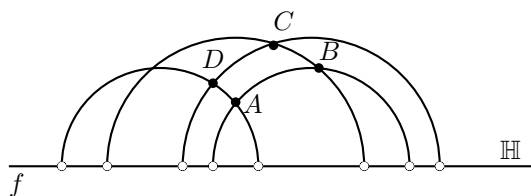


Figura 4: Quadrilatero iperbolico

AD e BC . Oltre a questo notiamo che gli angoli del quadrilatero sono tutti di ampiezza diversa. Ci poniamo allora i seguenti quesiti:

- a) esistono quadrilateri aventi angoli uguali?
- b) Esistono rettangoli iperboliche?

Non è difficile convincersi del fatto che, in geometria iperbolica, *non esistono* rettangoli! Infatti vale il seguente teorema:

Teorema 3 *In geometria iperbolica non esistono rettangoli.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esista un rettangolo iperbolico $ABCD$ (figura 8). Consideriamo i due triangoli ABD e CDB . Applicando ad essi il Teorema 2 si ha:

$$\angle BAD + \angle DBA + \angle ADB < 180^\circ, \quad \angle BCD + \angle DBC + \angle CDB < 180^\circ$$

²Per esprimere questa notevole proprietà del modello euclideo del piano iperbolico che stiamo descrivendo si dice che esso è un modello *conforme*.

da cui, essendo $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, anche

$$\angle DBA + \angle ADB < 90^\circ, \quad \angle DBC + \angle CDB < 90^\circ$$

Sommando membro a membro si ottiene la disuguaglianza:

$$\angle CBA + \angle ADC < 180^\circ$$

manifestamente falsa in quanto, per ipotesi, $\angle CBA + \angle ADC = 180^\circ$. \square

Lasciamo al lettore le indagini per rispondere al primo quesito.

3 Zoo Iperbolico

L'esplorazione di diversi tipi di poligoni iperbolici è un esercizio che, nel lungo periodo, potrebbe non risultare stimolante. Tuttavia la costruzione di poligoni con riga e compasso o al calcolatore è un'attività istruttiva in quanto permette di acquisire familiarità con il nuovo ambiente geometrico, oltre che con la geometria euclidea stessa. Per rendere più interessante questo tipo di esercizio suggeriamo la costruzione di uno zoo di animali iperbolici:

Esercizio 2 (*Ludico*) *Inventare degli animali, che vivono nel piano iperbolico, formati da uno o più poligoni iperbolici.*

Chiameremo questi animali **ipoanimali** dove il prefisso *ip* ricorda il fatto che essi abitano nel piano iperbolico e *po* ricorda che essi sono delimitati da poligoni. In Figura 5 è riprodotta un'*ipocapra* di nostra invenzione. L'*ipocapra* è delimitata da un poligono di sette lati, bocca e cilia sono segmenti iperbolici, la barba è un quadrilatero iperbolico e l'occhio un punto iperbolico.



Figura 5: Ipocapra

4 Il Software NonEuclid

Il software NonEuclid, per lo studio dei modelli di Poincaré del piano iperbolico, è nato nel 1994 all'Università del New Mexico. Attualmente esiste una versione in lingua italiana³ di questo software. Il software è corredato da un ipertesto

³Questa edizione è nata dalla collaborazione del sottoscritto con il dottor J. Castellanos che ha progettato il software.

divulgativo sulla geometria iperbolica che potrebbe risultare di interesse didattico. Soprattutto le *Attività* sono consigliate per approfondire numerosi aspetti peculiari della geometria iperbolica. NonEuclid è stato costruito per uno studio “dinamico” della geometria. Oltre ad incorporare le costruzioni geometriche classiche (punto medio, perpendicolare, ecc.), alla possibilità di eseguire riflessioni, esso contiene l’opzione “muovi punto” che permette di deformare con continuità le costruzioni geometriche trattate mantenendo inalterate le proprietà geometriche dei diversi oggetti.

Riferimenti bibliografici

- [1] J.W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Springer, Londra, 1999.
- [2] C. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano, 1980.

Sitografia

- Sito del software NonEuclid:
<http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html>.