Nodi di cravatta

Un approccio combinatorio

Andrea Centomo & Giovanni Paolini

20 novembre 2009

Modello Fink e Mao

Nodo: stringa di caratteri con lettere `S`, `D` e `C`

- si omettono i simboli $\otimes$ e $\odot$
- si toglie $D_{\otimes}C_{\odot}A$ $(S_{\otimes}C_{\odot}A)$ dalla chiusura $S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A$ $(D_{\odot}S_{\otimes}C_{\odot}A)$

Nodo di dimensione d

$$\updownarrow$$

Stringa di $n = d - 2$ caratteri

Esempio. Nodo mezzo Windsor: $S_{\otimes}D_{\odot}C_{\otimes}S_{\odot}D_{\otimes}C_{\odot}A \quad \leftrightarrow \quad$ `SDCS`

Vincoli per le stringhe

a) ogni stringa inizia con `S`

b) due lettere consecutive di una stringa non possono essere uguali

c) ogni stringa si conclude con `S` o `D`

$$\mathcal{S}_n = \{\text{stringhe di } n \geq 1 \text{ caratteri: } a), b), c) \text{ verificati}\}$$

Quante stringhe contiene $\mathcal{S}_n$?

d_k numero di stringhe di k caratteri, $k > 1$,

- soddisfano solo il vincolo b) (stringhe prive di doppie)
- iniziano e terminano con lettere **diverse** fissate a priori

u_k numero di stringhe con k caratteri, $k > 1$,

- che soddisfano solo il vincolo b)
- iniziano e terminano con lettere **uguali** fissate a priori

Ad esempio:

Inizio `S` Fine `D`	Inizio `S` Fine `S`
$d_2 = 1$ (`SD`)	$u_2 = 0$ (`SS` non è valida)
$d_3 = 1$ (`SCD`)	$u_3 = 2$ (`SDS`, `SCS`)
$d_4 = 3$ (`SDSD`, `SDCD`, `SCSD`)	$u_4 = 2$ (`SDCS`, `SCDS`)

Cerchiamo una relazione ricorsiva per d_n (ad esempio per stringhe `S...D`)

- ci sono d_{n-1} modi per completare una stringa con inizio `SC` e fine `D`
- ci sono u_{n-1} modi per completare una stringa con inizio `SD` e fine `D`

$$d_n = d_{n-1} + u_{n-1} \tag{1}$$

Analogamente per u_n (ad esempio per stringhe `S...S`):

- ci sono d_{n-1} modi per completare una stringa con inizio `SC` o `SD` e fine `S`

$$u_n = 2d_{n-1} \tag{2}$$

Sostituendo la (2) nella (1) si trova

$$d_n = d_{n-1} + 2d_{n-2} \tag{3}$$

$$d_n = d_{n-1} + 2d_{n-2} \tag{4}$$

Esplicitiamo d_n a partire dalle radici del polinomio $x^2 - x - 2$ ($x = 2$ e $x = -1$);

$$d_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n \tag{5}$$

Dato che $d_2 = 1$ e $d_3 = 1$ si calcolano i valori di α e β, concludendo che

$$d_n = \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \tag{6}$$

Infine possiamo determinare il numero T_n di stringhe di $\mathcal{S}_n$:

$$T_n = d_n + u_n = d_{n+1} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \tag{7}$$

In alternativa si può notare che

$$d_n + d_n + u_n = 2^{n-1} \tag{8}$$

$$2d_n + 2d_{n-1} = 2^{n-1}$$

$$d_n + d_{n-1} = 2^{n-2}$$

$$d_n = 2^{n-2} - 2^{n-3} + 2^{n-4} - \ldots \pm 1 \tag{9}$$

In conclusione

$$T_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \tag{10}$$

Quanti nodi di cravatta ci sono?

Per ragioni di natura fisica e per ragioni estetiche vale la limitazione

$$1 \leq n \leq 7 \tag{11}$$

Il numero totale di nodi T è

$$T = \sum_{n=1}^{7} T_n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{7} 2^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{7} 2^n = \frac{2^8 - 1}{3} = 85.$$

Forma

La forma di un nodo è descritta dal numero γ di movimenti di centro (`C`).

Nel modello semplificato $k = \gamma - 1$.

Quali valori possibili di k per stringhe di $\mathcal{S}_n$?

A) se n pari:

$$0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$$

B) se n dispari

$$0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}.$$

Quanti elementi di $\mathcal{S}_n$ hanno forma k?

Iniziamo considerando $n-k-1$ celle e andiamo a sistemare in esse k lettere `C`.

	C			C	C		

Il numero di modi m in cui è possibile fare questo si esprime attraverso il coefficiente binomiale

$$m = \binom{n-k-1}{k}$$

Aggiungiamo all'inizio e dopo ogni lettera `C` uno spazio vuoto.

		C				C		C			

Riempiamo il primo spazio vuoto con `S`, per soddisfare il vincolo a).

S		C				C		C			

Alterniamo lettere `D` o `S` fino ad incontrare la prima lettera `C`.

S	D	C				C		C			

Nel primo spazio vuoto dopo la prima lettera `C` possiamo scegliere di inserire una lettera `D` o `S`. Quindi si procede alternando fino alla seconda lettera `C`.

S	D	C	D	S	D	C		C			

Nel primo spazio vuoto dopo la seconda lettera `C` possiamo scegliere di inserire una lettera `D` o `S` ....

S	D	C	D	S	D	C	S	C	S	D	S

Ci sono 2^k possibili modi per completare la stringa!

Il numero di elementi di $\mathcal{S}_n$ con forma k è allora

$$F_n(k) = 2^k \cdot \binom{n-k-1}{k} \tag{12}$$

$d = n + 2$	$\gamma = k + 1$	classe	$F_n(k)$	T_n
3	**1**	$\{3, 1\}$	1	1
4	**1**	$\{4, 1\}$	1	1
5	**1**	$\{5, 1\}$	1	3
	2	$\{5, 2\}$	2	
6	**1**	$\{6, 1\}$	1	5
	2	$\{6, 2\}$	4	
7	1	$\{7, 1\}$	1	11
	2	$\{7, 2\}$	6	
	3	$\{7, 3\}$	4	
8	1	$\{8, 1\}$	1	21
	2	$\{8, 2\}$	8	
	3	$\{8, 3\}$	12	
9	1	$\{9, 1\}$	1	43
	2	$\{9, 2\}$	10	
	3	$\{9, 3\}$	24	
	4	$\{9, 4\}$	8	

Tabella 1. Classi di nodi $\{d, \gamma\}$