

# Matematica e Ecocardiografia

## Un primo approccio al C++

DI ANDREA CENTOMO  
Liceo "F. Corradini" di Thiene

*Email:* andrea.centomo@istruzione.it

2 marzo 2009

## 1 Introduzione

Nell'indagine ecocardiografica Doppler una sonda ad ultrasuoni viene collocata in diversi punti del corpo del paziente in modo che l'ecocardiografo possa visualizzare:

1. opportune sezioni cardiache, registrando in singole immagini o in filmati il funzionamento di diverse parti del cuore;
2. lo spettro di velocità del flusso ematico in punti prescelti.

Sulle immagini e sugli spettri vengono quindi eseguite delle misurazioni i cui dati, elaborati dal software installato nell'ecocardiografo, permettono al medico di disporre di tutti i parametri necessari per la refertazione e per la stesura di una diagnosi. Una volta completato l'esame tutti i dati, comprensivi di immagini e filmati, vengono salvati in un archivio digitale.

In questo articolo ci prefiggiamo diversi scopi. Il primo è di mostrare come conoscenze matematiche piuttosto modeste permettano di comprendere un referto medico ecocardiografico in modo abbastanza completo. Il secondo è di implementare, ricorrendo al linguaggio di programmazione di alto livello C++, le formule ecocardiografiche che permettono il calcolo delle voci di un referto in modo da costruire un nostro rudimentale software di refertazione.

Come si potrà vedere il percorso che proponiamo permette allo studente sia di approfondire tematiche di matematica importanti, sia di avere una panoramica completa delle strutture elementari del linguaggio di programmazione C++ (cicli, funzioni, strutture condizionali). Oltre a questo non è forse superfluo osservare come questo genere di attività didattica cerchi di porre lo studente di fronte all'informatica non come utilizzatore ma, nel suo piccolo, come progettista del software.

## 2 Il cuore

La comprensione di un referto ecocardiografico ha come prerequisito la conoscenza elementare dell'anatomia e della fisiologia del cuore. Il cuore è un organo che fa parte dell'apparato circolatorio che, contraendosi ritmicamente, esercita una forza propulsiva sul sangue e ne determina la circolazione all'interno dei vasi sanguigni.

Da un punto di vista anatomico il cuore è un organo cavo muscolare, localizzato nel mediastino, ossia nella regione posta tra polmoni e il tratto iniziale dell'arteria aorta, delle arterie e delle vene polmonari e della vena cava superiore. Ha una forma grossolanamente conica, con la punta rivolta verso il basso a sinistra. Una sezione trasversale - vedi Figura 1 - mostra nel cuore la presenza di un setto longitudinale che lo divide in due parti, destra e sinistra, e di due setti orizzontali che, in ciascuna parte, dividono la porzione superiore (atrio) da quella inferiore (ventricolo). Il cuore, dunque, risulta suddiviso in quattro camere. Ciascun atrio è in comunicazione con il ventricolo sottostante mediante una valvola: mitrale a sinistra e tricuspide a destra.

L'alternarsi dei movimenti di contrazione e di rilassamento del muscolo cardiaco determinano il ciclo cardiaco che comprende le due fasi denominate *diastole* e *sistole*. Durante la diastole tutto il cuore è rilassato. Attraverso le vene cave il sangue entra nell'atrio destro, mentre attraverso le vene polmonari entra nell'atrio sinistro. Le valvole atrioventricolari sono aperte e consentono il passaggio del sangue dagli atri ai ventricoli. La diastole dura abbastanza da permettere ai ventricoli di riempirsi quasi completamente. La sistole comincia con una contrazione degli atri che determina il riempimento completo dei ventricoli. Quindi si contraggono i ventricoli: la loro contrazione chiude le valvole atrioventricolari e apre le valvole aortica e polmonare in modo che il sangue povero di ossigeno sia spinto verso i polmoni, mentre quello ricco di ossigeno si dirige verso tutto il corpo attraverso l'aorta.

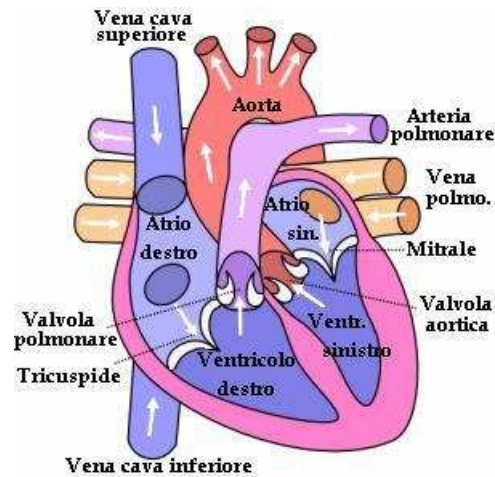


Figura 1. Il cuore

### 3 Il referto

Il punto di partenza del nostro percorso è rappresentato dal seguente estratto di referto reale di un paziente che per tutela della privacy chiameremo  $\mathcal{P}$ :

Nome: P

Peso: 71,0 kg; Altezza: 168 cm; Sup. Corp.: 1,81 mq;

Aorta Diametro: 3,5 cm

Atrio sn: 3,5 cm

Ventricolo Destro Diametro 2,3 cm

Ventricolo Sinistro:

Diastole: 4,4 cm; Sistole: 3,0 cm; F.Acc.: 31,8 %

Setto I-V Spessore: 1,0 cm

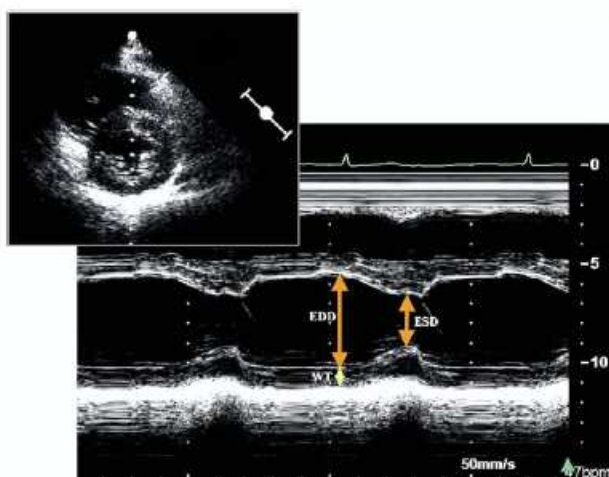
Parete Post. Spessore: 1,0 cm

Note: Atrio sinistro di normali dimensioni. Ventricolo sinistro di normali dimensioni, cinetica e funzione sisto-diastolica (VTD 49 ml/m<sup>2</sup>, FE 60%, massa 82 grammi/m<sup>2</sup>). Apparati valvolari normali. Atrio destro normale. Ventricolo destro normale. Aorta e polmonare normali. Assente versamento pericardico.

## 4 Ventricolo sinistro

Come si può intuire dalla lettura del referto tra le quattro camere cardiache la più indagata è il ventricolo sinistro. La conoscenza delle dimensioni, del volume e, in generale, della funzione di pompa del ventricolo sinistro costituiscono un momento importante per la valutazione diagnostica. Vediamo ora come conoscenze di matematica elementari ci permettano di comprendere come i cardiologi, attraverso l'esame ecocardiografico, siano in grado di calcolare i diversi parametri di funzionalità per il ventricolo sinistro.

Dall'analisi di immagini elaborate durante l'esame ecocardiografico è possibile valutare il valore del diametro telediastolico EDD<sup>1</sup> (misurato al termine della diastole) e telesistolico ESD<sup>2</sup> (misurato al termine della sistole) del ventricolo sinistro.



**Figura 2.** Misura di EDD e di ESD in modalità M-mode guidata da un'immagine della sezione cardiaca in vista asse corto parasternale [1].

Un primo parametro ecocardiografico significativo nella valutazione della funzionalità del ventricolo sinistro è rappresentato dalla **frazione di accorciamento** definita attraverso il valore percentuale

$$F_{Acc} = \frac{EDD - ESD}{EDD} \cdot 100.$$

La frazione di accorciamento varia da 0 (in questo caso diametro telediastolico e telesistolico hanno lo stesso valore e quindi in sostanza il cuore non pulsa più) a 100 (il diametro telesistolico si riduce a zero e quindi la contrattilità del muscolo cardiaco è totalmente compromessa). Valori normali per questo parametro cadono nell'intervallo

$$25 < F_{Acc} < 44$$

da cui

$$\frac{14}{25} EDD < ESD < \frac{3}{4} EDD.$$

Per il paziente  $\mathcal{P}$  si ha  $EDD = 44 \text{ mm}$  e  $ESD = 30 \text{ mm}$ . Allora avremo  $FS \approx 31.8\%$  e dal momento che la relazione precedente si traduce in

$$24.64 \text{ mm} < ESD < 33 \text{ mm}$$

il valore  $ESD = 30 \text{ mm}$  è un valore nella norma.

**Esercizio 1.** Scrivere un programma che dati in input EDD e ESD restituisca il valore di  $F_{Acc}$ .

**Esercizio 2.** Modificare il programma dell'esercizio precedente in modo che accanto al valore di  $F_{Acc}$  compaia un asterisco \* se il valore è fuori dal campo dei valori normali.

1. Acronimo di End Diastolic Diameter.

2. Acronimo di End Systolic Diameter.

Alla frazione di accorciamento corrisponde idealmente un secondo parametro noto come **frazione di eiezione** espresso dalla percentuale

$$FE = \frac{VTD - VTS}{VTD} \cdot 100$$

dove VTD e VTS rappresentano rispettivamente il volume misurato al termine della diastole e della sistole del ventricolo sinistro. Valori normali per questo parametro soddisfano la condizione

$$FE > 50$$

da cui

$$VTS < \frac{1}{2} VTD$$

e quindi, in condizioni normali, il volume del ventricolo sinistro subisce durante la sistole una riduzione inferiore ad almeno la metà del volume misurato in diastole.

Il problema matematico significativo che ora si pone è di comprendere come si possa stabilire il volume (telediastolico e telesistolico) di un corpo di forma irregolare come il ventricolo sinistro a partire dalle misurazioni ecocardiografiche. Problemi matematici di questo genere sono in verità molto antichi ed è interessante che si ripropongano anche nell'ecocardiografia moderna. Una delle formule maggiormente utilizzate nella pratica, anche se non raccomandata dalle specifiche dell'American Society of Echocardiography [1], è la *formula di Teicholz*

$$V = \frac{7}{2.4 + d} \cdot d^3$$

dove  $d$  è il diametro (telesistolico o telediastolico) del ventricolo sinistro. Per il paziente  $\mathcal{P}$  di prima avremo

$$VTD = \frac{7}{2.4 + 4.4} \cdot 4.4^3 \approx 88 \text{ ml} \quad VTS = \frac{7}{2.4 + 3} \cdot 3^3 \approx 35 \text{ ml}$$

da cui  $FE \approx 60\%$ .

**Esercizio 3.** Scrivere un programma che dati in input EDV e ESV restituisca il valore di FE in modo che accanto al valore compaia un asterisco \* se il valore è fuori dal campo dei valori normali.

Per dare un'interpretazione alla formula del volume possiamo ad esempio riscriverla nella forma

$$V = \frac{56}{2.4 + d} \cdot \frac{d^3}{8} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{21d}{\pi(2.4 + d)} \cdot \frac{d^2}{4}$$

da cui possiamo dedurre che il ventricolo sinistro è assimilabile ad un ellissoide di semiassi

$$a = b = \frac{d}{2} \quad c = \frac{21a}{\pi(1.2 + a)} \approx \frac{7a}{1.2 + a} = \frac{7d}{2.4 + d}$$

Ora

$$\frac{c}{a} = \frac{14}{2.4 + d}$$

e

$$\frac{c}{a} = 1 \quad \iff \quad d = 11.6 \text{ cm}$$

quindi il ventricolo assume una forma sferica in corrispondenza del valore  $d = 11.6$  cm. Tenuto conto che i valori normali di  $d$  sono ben al di sotto di questo valore, possiamo dire che il ventricolo sinistro si può pensare come un'ellissoide la cui forma all'aumentare di  $d$  tende a diventare sferica. Per il paziente  $\mathcal{P}$  i semiassi dell'ellissoide, misurati in diastole, sono

$$a = b = 2.2 \text{ cm} \quad c = 3.35 \text{ cm}$$

e la sua ricostruzione è rappresentata in Figura 3<sup>3</sup>. La forma reale del ventricolo sinistro è ovviamente diversa da un ellissoide e quindi la formula di Teicholz fornisce un metodo per *stimare* il volume ventricolare. Le stime andranno riviste, ricorrendo se necessario ad altri strumenti diagnostici o a ricostruzioni tridimensionali, soprattutto per quelle patologie che sono legate a rotture di simmetria della forma del ventricolo.

3. La figura è stata ottenuta con il software utilizzabile online all'indirizzo [http://www.javaview.de/demo/surface/common/PaSurface\\_Ellipsoid.html](http://www.javaview.de/demo/surface/common/PaSurface_Ellipsoid.html)

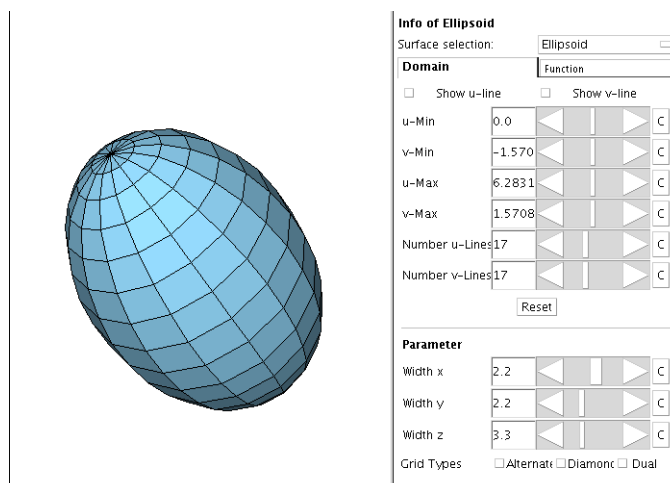


Figura 3. Ricostruzione del ventricolo sinistro

La stima della massa in grammi del ventricolo sinistro  $LVM^4$  si ottiene utilizzando la formula empirica di Devereux

$$LVM = 0.8 \cdot 1.04[(EDD + PWT + IVST)^3 - EDD^3] + 0.6$$

dove  $PWT^5$  e  $IVST^6$  rappresentano gli spessori della parete posteriore e del setto interventricolare del ventricolo sinistro. Nel caso del paziente  $\mathcal{P}$  si ha

$$LVM = 0.8 \cdot 1.04[(4.4 + 1 + 1)^3 - 4.4^3] + 0.6 \approx 148 \text{ grammi.}$$

**Esercizio 4.** Modificare il programma delle Esercizio 3 aggiungendo il calcolo di LVM.

## 5 Superficie corporea

In fisiologia e in medicina, la misura della superficie corporea  $BSA^7$  è un indicatore del metabolismo considerato migliore del solo peso corporeo. La valutazione di BSA è importante in diverse situazioni mediche come, ad esempio, il dosaggio di farmaci nella chemioterapia. La formula maggiormente utilizzata nell'ecocardiografia europea è la formula empirica di Dubois & Dubois del 1916:

$$BSA = 0.007184 \cdot p^{0.425} h^{0.725} = \frac{449}{62500} \sqrt[40]{p^{17}} \cdot \sqrt[40]{h^{29}}$$

dove  $p$  indica il peso corporeo in chilogrammi e  $h$  l'altezza in centimetri. Così per il paziente  $\mathcal{P}$ , di altezza  $h = 168$  cm e  $p = 71$  kg avrà

$$BSA = 0.007184 \cdot 71^{0.425} \cdot 168^{0.725} \approx 1.81$$

Un'altra formula usata è la formula di Mosteller adottata dal Pharmacy and Therapeutics Committee of the Cross Cancer Institute del Canada:

$$BSA = \frac{\sqrt{ph}}{60}$$

In entrambi i casi il valore di BSA è espresso in  $m^2$ .

**Esercizio 5.** Scrivere un programma che implementi come **funzioni** le formule di BSA secondo Mosteller e Dubois & Dubois e che dati peso a altezza restituisca i corrispondenti valori di BSA.

4. Acronimo di Left Ventricular Mass.

5. Acronimo di Posterior Wall Thickness.

6. Acronimo di Inter Ventricular Sect Thickness.

7. Acronimo di Body Surface Area.

**Esercizio 6.** Sapendo che la statura media di un maschio italiano è di 174 cm. scrivere un programma che dato in input il peso  $p$  restituisca la tabella dei valori di BSA, calcolati con la formula di Mosteller, nel campo di variazione  $40 \text{ kg} \leq p \leq 100 \text{ kg}$  con variazione di 1 kg.

In ecocardiografia attraverso BSA viene calcolato l'*indice cardiologico*  $d_i$  relativo ad un dato  $d$  attraverso la formula generale

$$d_i = \frac{d}{\text{BSA}}.$$

L'indice di un dato esprime il valore di quel dato in relazione a peso e altezza del paziente. Consideriamo, per fare un esempio, la massa del ventricolo sinistro: non è difficile comprendere che un dato valore di massa assume un significato diverso in un paziente che abbia una statura di 160 cm e peso 80 kg piuttosto che in un paziente di 190 cm e peso 80 kg. Dividendo la massa del ventricolo sinistro per il valore di BSA si ottiene un dato che tiene conto di questa differenza. Per il paziente  $\mathcal{P}$  l'indice di massa del ventricolo sinistro e del volume telediastolico sono

$$\text{LVM Index} = \frac{148}{1.81} = 82 \quad \text{VTD Index} = \frac{88}{1.81} \approx 49$$

esattamente come nel referto.

**Esercizio 7.** Scrivere un programma che stampa un referto ecocardiografico che contiene i seguenti dati: nome del paziente, peso, altezza, BSA (Mosteller), diametri e volumi del ventricolo sinistro, frazione di accorciamento e di eiezione, massa del ventricolo sinistro. Di diametri, volumi e masse si includa il calcolo degli indici.

## 6 Introduzione al C++

In questo paragrafo riportiamo alcuni dei codici richiesti negli esercizi con alcuni commenti.

### 6.1 Esercizio 1

Prima di proporre il codice che risolve l'Esercizio 1 il docente avrà cura di mostrare il funzionamento dell'ambiente di sviluppo C++ disponibile nel laboratorio, evidenziando come si edita il codice, come si compila e come avviene il debugging.

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    double LVDiastolicDiameter, LVSystolicDiameter, FractionalShortening;

    cout << "Diametro telediastolico ventricolo sx [mm] = ";
    cin >> LVDiastolicDiameter;

    cout << "Diametro telesistolico ventricolo sx [mm] = ";
    cin >> LVSystolicDiameter;

    FractionalShortening =
    100.0 * ( LVDiastolicDiameter - LVSystolicDiameter ) / LVDiastolicDiameter;

    cout << "Frazione di Accorciamento [%] = " << FractionalShortening << "\n";
}

```

Risulta importante che lo studente, oltre a capire il significato del codice e della sintassi, usi correttamente il tabulatore per creare i rientri in modo corretto e si abitui a scrivere il codice ordinatamente. Molto importante è anche la scelta del nome da dare alle variabili: in lingua inglese, in modo che se ne possa comprendere immediatamente il significato e scritte in modo camel-case (alternando maiuscole e minuscole).

## 6.2 Esercizio 2

La soluzione dell'esercizio richiede la conoscenza delle strutture condizionali.

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    double LVDiastolicDiameter, LVSystolicDiameter, FractionalShortening;

    cout << "Diametro telediastolico ventricolo sx [mm] = ";
    cin >> LVDiastolicDiameter;

    cout << "Diametro telesistolico ventricolo sx [mm] = ";
    cin >> LVSystolicDiameter;

    FractionalShortening =
        100.0 * ( LVDiastolicDiameter - LVSystolicDiameter ) / LVDiastolicDiameter;

    if ( FractionalShortening > 25.0 & FractionalShortening < 44.0)
        cout << "Frazione di Accorciamento [%] = " << FractionalShortening << "\n";
    else
        cout << "Frazione di Accorciamento [%] = " << FractionalShortening
            << "*\n";
}
```

## 6.3 Esercizio 5

```
#include <iostream>
#include <math.h>

using namespace std;

/**
 * @weight Weight
 * @height Height
 *
 * return Body Surface Area (Dubois Formula)
 */

double
BodySurfaceAreaDubois(double weight, double height)
{
    return pow(weight,0.425) * pow(height,0.725) / 139.2;
}

/**
 * @weight Weight
 * @height Height
 *
 * return Body Surface Area (Dubois Formula)
 */
```

```

double
BodySurfaceAreaMosteller(double weight, double height)
{
    return sqrt( weight * height ) / 60.0;
}

int main()
{
    double weight, height, delta, tollerance;

    cout << "Peso paziente [Kg] = ";
    cin >> weight;

    cout << "Altezza paziente [cm] = ";
    cin >> height;

    cout << "BSA Dubois [m2] = " << BodySurfaceAreaDubois(weight,height) << "\n";

    cout << "BSA Mosteller [m2] = " << BodySurfaceAreaMosteller(weight,height)
        << "\n";
}

```

## 6.4 Esercizio 6

```

#include <iostream>
#include <math.h>

using namespace std;

/**
 * @weight Weight
 * @height Height
 *
 * return Body Surface Area (Mosteller Formula)
 */

double
BodySurfaceAreaMosteller(double weight, double height)
{
    return sqrt( weight * height ) / 60.0;
}

int main()
{
    double weight, height;

    for (int i = 40; i < 101; i++)
    {
        cout << "BSA " << BodySurfaceAreaMosteller(174,i) << " Peso " << i
            << "\n";
    }
}

```

## Bibliografia

[1] *Recommendations for Chamber Quantification: a report from the American Society of Echocardiography's guidelines and standards committee and the chamber quantification writing group, developed in conjunction with the European Association of Echocardiography, a branch of the European Society of Cardiology.*

Disponibile online [www.asefiles.org/ChamberQuantification.pdf](http://www.asefiles.org/ChamberQuantification.pdf)

[2] G. Nicolosi, *Trattato di Ecocardiografia clinica* (4 voll), Edizioni Piccin, 1999.