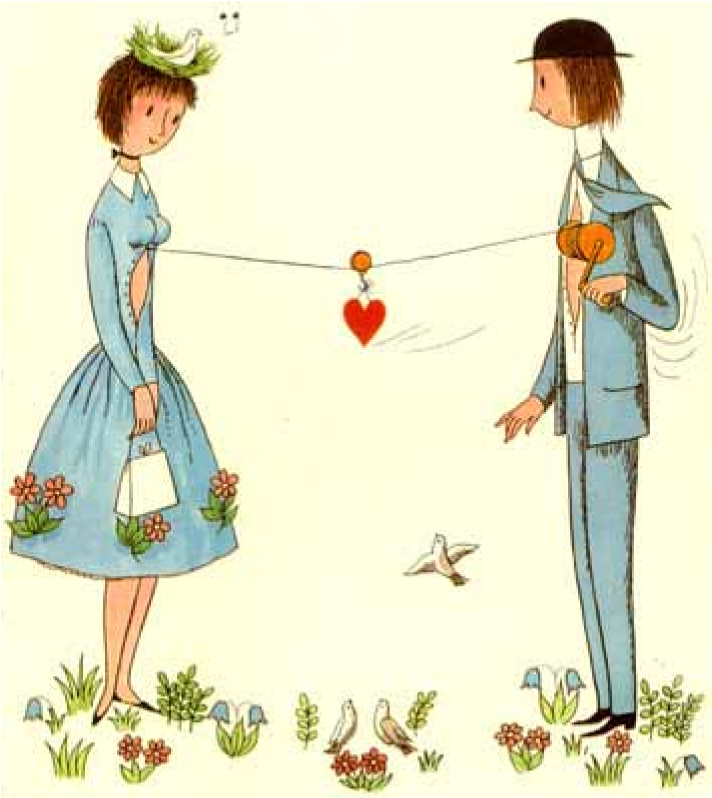
Cuori Matematici

di Andrea Centomo



Se sbirciamo nei diari dei nostri allievi o semplicemente sui loro banchi capita spesso di imbattersi in scritte che vogliono comunicare sentimenti affettivi. Il linguaggio maggiormente diffuso fa uso di scritte abbreviate del tipo TVB per “ti voglio bene” nelle loro molteplici variazioni, di “emoticons” come ad esempio :-* per mandarsi un bacio e talvolta di immagini di cuori stilizzati e colorati. Durante una lezione in cui scoprii un'allieva intenta a concludere un biglietto con un TVTTTB per dire “ti voglio tanto tanto tanto bene” pensai, anziché rampognare come al solito, di cogliere lo spunto per ironizzare dicendole che il linguaggio matematico le avrebbe permesso di veicolare lo stesso messaggio in una forma più elegante e potente. Visto che si parlava di funzioni esponenziali e delle loro applicazioni le suggerii il simbolo $e^{\heartsuit}$ come metafora di un amore che cresce con il ritmo vertiginoso tipico di queste funzioni! Devo ammettere che l'osservazione non lasciò indifferente la classe in quanto a distanza di un anno trovo ancora di tanto in tanto questo simbolo scritto da qualche parte. L'attenzione che gli studenti manifestano per il tema dell'amore mi ha spinto da tempo a riflettere sull'opportunità di presentare qualche argomento da un punto di vista che possa toccare, sia pure marginalmente, questo sentimento. Così, ad esempio, quando tratto la serie geometrica mi diverto a far osservare che la frase “ti amo ogni giorno di più” potrebbe nascondere un amore ben lontano dall'essere infinito se quel di più che si aggiunge varia come il termine generico di una progressione di ragione strettamente minore uno. Allo stesso modo, parlando di aritmetica modulare, trovo sempre il modo per descrivere qualche semplice metodo crittografico utile per spedirsi frasi d'amore. Gli esempi potrebbero moltiplicarsi.

In questo articolo divulgativo, le cui motivazioni sono principalmente (ma non solo) ricreative, mi ripropongo di mostrare come ci si possa divertire nel costruire dei cuori che celano un significato matematico e che, allo stesso tempo, permettono di comunicare qualche cosa di affettuoso in modo talvolta speciale. La speranza nel proporlo è che altri si divertano a scoprirne di nuovi!

1. Cuore di Ippocrate

Il primo cuore che descriviamo è il cuore di Ippocrate [1]. Attribuiamo ad esso questo nome in quanto, come si può vedere in Figura 1, in esso sono evidenziate in rosso le due lunule [2] di cui la storia ci tramanda Ippocrate abbia calcolato per primo le aree.

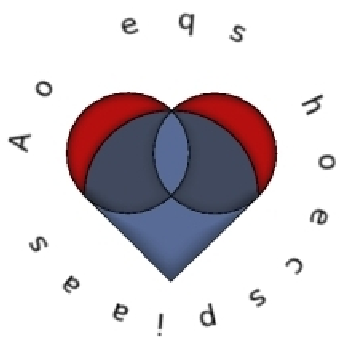


Figura 1. Cuore di Ippocrate

Dopo molti secoli dalla nascita di Ippocrate non è difficile per noi verificare che, detta $2r$ la distanza tra le punte che non si toccano delle lunule, la somma delle loro aree è pari a r^2. Dal momento che siamo liberi di progettare il nostro cuore come preferiamo, possiamo utilizzare per r un valore intero da cui consegue che anche il valore di r^2.sarà intero e potremmo utilizzare questo numero come chiave per un semplice metodo crittografico. Nel nostro esempio è stato scelto originariamente r uguale a 2 cm. e quindi, utilizzando come chiave il numero 4, abbiamo scritto il messaggio cifrato che circonda l'immagine:

Ao eqs hoecspiaas

Il messaggio in chiaro che suona *ti amo diavoletto*, è stato cifrato con la tecnica nota come cifratura di Cesare [3] ossia sostituendo ciascuna lettera dell'alfabeto con la lettera che si trova 4 posti più in là nell'ordine alfabetico. Chi riceve il messaggio, sapendo che la chiave è pari all'area delle lunule, non avrà difficoltà a decifrare il messaggio. La certezza della corretta decifratura sarà rafforzata dal fatto che la zona in blu scuro di Figura 1 rappresenta una coppia di corna tipiche di un diavoletto!

2. Cuori ellittici di Hamming

Una famiglia di forme a cuore classiche si può ottenere ricorrendo ad una coppia di ellissi omocentriche con gli assi che formano tra loro un angolo non nullo.

Figura 2 Cuori ellitici di Hamming

Questa disposizione permette di ottenere due cuori che si sovrappongono parzialmente ciascuno dei quali può risultare o meno simmetrico in relazione alla scelta dell'angolo formato dagli assi e dei parametri delle singole ellissi. L'idea che ciascuno dei due cuori per esistere abbia bisogno di una parte dell'altro ha una evidente carica affettiva. Per personalizzare i due cuori è possibile ad esempio scegliere come lunghezze degli assi di ciascuna ellisse le lunghezze di nome e cognome di ciascuno dei due amanti. Se i nomi dei due amanti hanno lo stesso numero di lettere possiamo facilmente arricchire di significato affettivo e matematico la costruzione scegliendo l'angolo di inclinazione tra gli assi delle ellissi in funzione della distanza tra i nomi misurata con la metrica di Hamming [4].

Per chiarire come viene definita la metrica di Hamming consideriamo due nomi di lunghezza uguale come ad esempio *Flavio* e *Clodia*. Confrontando le lettere corrispondenti osserveremo che solo la seconda e la quinta sono uguali mentre le rimanenti quattro sono diverse. La metrica di Hamming restituisce come valore il numero di coppie formate da lettere diverse ossia:

$$d_H(Flavio, Clodia) = 4$$

Nella realizzazione della Figura 2 si è scelto quindi di avere gli assi maggiori delle ellissi inclinati di un angolo pari a π/4. Il lettore interessato a stabilire la distanza tra nomi di lunghezza diversa può utilizzare la metrica di Levenshstein [4].

3. Un cuore da Manhattan

Consideriamo nel piano la metrica taxicab o di Manhattan definita da

$$d_T(P,Q)=\left|x_P-x_Q\right|+\left|y_P-y_Q\right|$$

dove $P=(x_P, y_P)$ e $Q=(x_Q, y_Q)$ sono due punti qualsiasi. La distanza di Manhattan coincide con la lunghezza euclidea minima del percorso ottenuto congiungendo *P* e *Q* con segmenti paralleli agli assi coordinati.

Un problema classico, che si può porre didatticamente, consiste nel chiedersi che forma abbiano le coniche nella geometria di Manhattan. Evitando un approccio generale al problema, per il quale, si rinvia a [5], è divertente studiare qualche caso particolare.

Il caso più semplice consiste nel determinare la forma della circonferenza di centro l'origine e raggio *r* la cui equazione è

$$|x|+|y|=r$$

e la cui forma è un quadrato di vertici $(r,0),(0,r),(-r,0),(0,-r)$.

Un caso un più istruttivo consiste nello studio dell'ellisse. Non è difficile vedere, ad esempio, che l'equazione dell'ellisse di fuochi $F=(2,-2)$, $G=(4,0)$ e di parametro 8 è

$$|x-2|+|y+2|+|x-4|=8$$

che definisce un ottagono di vertici $(0,0),(0,-2),(2,-4),(4,-4),(6,-2),(6,0),(4,2) e (2,2)$.

Con queste due coniche è già possibile costruire un *T*-cuore come in Figura 3.

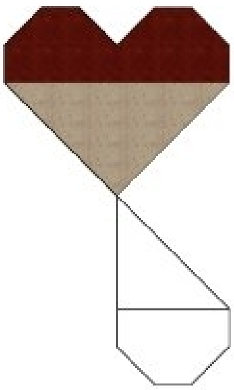


Figura 3. *T*-cuore

La parte di piano decorata in marrone, con una tessitura identica al colore dei pantaloni di velluto di lui, è stata ottenuta a partire da due *T*-ellissi, mentre la parte decorata in grigio, con una tessitura identica a quella della gonna di lei, è un *T*-semicerchio. Il lettore sofisticato può ricercare in questo cuore messaggi reconditi più stimolanti e profondi.

Un *T*-cuore si può realizzare piegando la carta e può essere utilizzato per creare un segnalibro o altro. I curiosi possono visitare ad esempio [6].

4. Cuore iperbolico

Il modello di geometria che scegliamo per l'ultimo cuore è il modello conforme del semipiano di Poincaré della geometria iperbolica [7]. Per introdurre questo modello consideriamo nel piano euclideo una qualsiasi retta *ST* (detta assoluto). I punti (iperbolici) sono i punti euclidei interni al semipiano superiore delimitato da *ST*. Indichiamo l'insieme di questi punti con Σ. Le rette (iperboliche) possono essere di due tipi (1) intersezioni di circonferenze, con centro appartenente ad *ST*, con Σ o (2) intersezioni di rette perpendicolari a *ST* con Σ.

Come noto le distanze nel piano iperbolico si misurano in modo particolare. Infatti se *P* e *Q* sono due punti del piano iperbolico avremo due casi. Nel primo supponiamo che essi individuino univocamente una retta iperbolica di tipo (1) che, al limite, interseca *ST* in due punti euclidei *A* e *B* come in Figura 4.

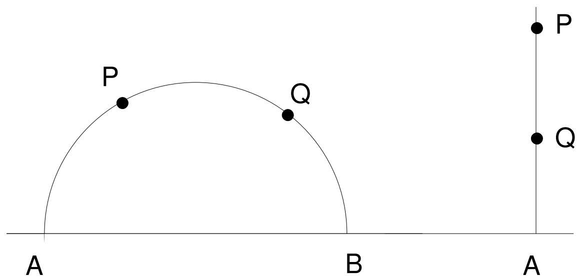


Figura 4. Rette iperboliche

Indicate con $|PA|$, $|PB|$, $|QA|$, e $|QB|$ le distanze euclidee rispettivamente di *P* da *A*, di *P* da *B*, ecc... e con ln il logaritmo naturale, si definisce distanza iperbolica tra i punti *P* e *Q* il numero reale

$$d_P(P,Q) = \left|\ln \frac{|PA|/|PB|}{|QA|/|QB|}\right|$$

Nel caso in cui i punti definiscano una retta iperbolica del tipo (2), che al limite interseca *ST* in *A,* la distanza iperbolica si determina ponendo

$$d_P(P,Q) = \left|\ln |PA|/|QA|\right|$$

A dispetto della complicazione della metrica non sarebbe difficile vedere che una circonferenza iperbolica ha la stessa forma di una circonferenza euclidea. Come si può intuire tuttavia osservando la struttura logaritmica della metrica le due circonferenze non sono omocentriche!

Figura 5. Cuore con circonferenze iperboliche

Consideriamo ora il cuore di Figura 5 costruito utilizzando quattro circonferenze euclidee tangenti a due a due ed aventi lo stesso raggio. Le zone colorate in marrone chiaro e scuro racchiudono una parte di piano iperbolico racchiusa tra due segmenti iperbolici. La costruzione è stata realizzata in modo che il vertice inferiore V del cuore avesse coordinate $(0;e)$ e che la distanza iperbolica del primo segmento da V fosse pari a ½ e che la distanza del secondo segmento da V fosse pari a 1. Possiamo ora immaginare che questi segmenti definiscano le tacche di una scala graduata che misura la crescita dell'amore. Se riguardiamo la situazione dal punto di vista di un osservatore euclideo è chiaro che la scala graduata avrà la prima tacca a distanza e da V e la seconda tacca a distanza e^2 da V. Si tratta quindi di una scala adatta a misurare un aumento esponenziale dell'amore! Insomma siamo di fronte ad una nuova metafora di $e^{♥}$!

Sitografia

[1] M. Galeazzi, La Matematica Greca, sito di Lettera Matematica Pristem

[2] G. Loria, Storia delle matematiche

[3] Il cifrario di Cesare

[4] Metriche di Hamming e Levenshtein

[5] Classificazione delle coniche nella geometria taxicab

[6] Modelli origami

[7] Modello del semipiano di Poincaré

Andrea Centomo

c/o Liceo “F. Corradini”

Via 1° Maggio 15

36016 Thiene (VI)

Tel. 0445 364301

email: andrea.centomo@istruzione.it